2 Systèmes linéaires et matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si on calcule le produit matriciel AX, on trouve :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix}$$

D'où, l'équation matricielle $AX = B$ équivaut au système d'équations :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Exemple 1.
Le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 2y + 2z & = & 11 \\ -x + 6y - 5z & = & -28 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -28 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Remarque.
On écrit dans A les coefficients de x, y et z, dans X les inconnues (x, y et z) et dans B les constantes.

Pour résoudre matriciellement le système (S), il faut trouver le vecteur X tel que $AX = B$. Si la matrice A est inversible, on sait alors que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = Id$$

d'où :

$$\begin{aligned} AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IdX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Pour résoudre un système matriciellement, il faut donc :

1. Prouver que la matrice A est inversible (grâce au déterminant)
2. Trouver la matrice inverse A^{-1}

2.1 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant est un outil qui permet de déterminer si une matrice est inversible.

Proposition 2.
Soit A une matrice carrée.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Proposition 3.
Soit A une matrice carrée de <u>*taille 2*</u> *telle que* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*. Alors*

$$\det(A) = ad - cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

Proposition 4 (Méthode de Sarrus)**.**
Soit A une matrice carrée de <u>*taille 3*</u> *telle que* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$*. Alors*

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Proposition 5 (Propriétés du déterminant)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
3. *Si A est une matrice triangulaire, alors* $\det(A)$ *est égal au produit des termes de la diagonale.*

Proposition 6 (Propriétés complémentaires)**.**

1. *Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée uniquement de* 0 *est nul.*
2. *Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.*
3. *Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des* ***autres*** *colonnes (resp. des* ***autres*** *lignes) est nul.*
4. *L'échange de deux colonnes d'un déterminant (resp. deux lignes) multiplie le déterminant par* -1.
5. *Si l'on multiplie une colonne d'un déterminant (resp. une ligne) par un scalaire* λ*, le déterminant est multiplié par* λ.
6. *Le déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des* ***autres*** *colonnes (resp. des* ***autres*** *lignes). Autrement dit, si on effectue des opérations du type* $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$ *(resp.* $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i$*), le déterminant reste le même.*

Remarques.

- *Un méthode pour calculer un déterminant, est donc, d'effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes, afin d'obtenir une matrice triangulaire, puis de multiplier les termes de la diagonale.*
- *Pour triangulariser une matrice, on peut par exemple utiliser la méthode de Gauss.*

Exemple 7.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *On a :*

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= 1 \times 3 \times (-3) \\
&= -9
\end{aligned}
$$

Définition 8 (Mineur)**.**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *une matrice carrée de taille* n *dont les coefficients sont notés* $a_{i,j}$. *Soient* p *et* q *deux entiers compris entre* 1 *et* n.
On appelle mineur *de* $a_{p,q}$*, le déterminant* $\Delta_{p,q}$ *de la matrice extraite de* A*, obtenue en supprimant la* p*-ème ligne et la* q*-ème colonne de* A.

Exemple 9.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$
\textit{mineur de } a_{1,2} = \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ 0 & \cancel{2} & 1 \\ 1 & \cancel{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1
$$

Définition 10 (Cofacteur).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$. Soient p et q deux entiers compris entre 1 et n.
On appelle cofacteur *de $a_{p,q}$ la quantité :*

$$(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$$

Exemple 11.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\textit{cofacteur de } a_{1,2} = (-1)^{1+2}\Delta_{1,2} = -1 \times (-1) = 1$$

Théorème 12 (Développement suivant une colonne).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Exemple 13.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *On choisit de développer par rapport à la première colonne.*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-3) + (0-8) = -9 \end{aligned}$$

Théorème 14 (Développement suivant une ligne).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Exemple 15.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *On choisit de développer par rapport à la deuxième ligne.*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(1-4) - (3-0) = -9 \end{aligned}$$

2.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition 16 (Matrice inverse)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n inversible.
La matrice inverse *de A, notée A^{-1}, est la matrice définie par :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

où I_n est la matrice identité de taille n.

Exemple 17.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
B est la matrice inverse de A. En effet,

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 18 (Comatrice)**.**
Soit A une matrice carrée.
On appelle comatrice *de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A.*

Remarque.
Si on note $a_{i,j}$ le coefficient de A à la i-ème ligne et j-ème colonne, et $c_{i,j}$ le coefficient de $\mathrm{Com}(A)$ à la i-ème ligne et j-ème colonne, on a :

$$c_{i,j} = \textit{cofacteur de } a_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur de $a_{i,j}$.

Exemple 19.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 20.
Soit A une matrice carrée inversible. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{Com}(A)$$

Exemple 21.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 12 & -8 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -12 & 8 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Théorème 22.
Si on transforme une matrice carrée A en Id à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes) et qu'on applique ces mêmes opérations simultanément à la matrice Id, on obtient la matrice inverse de A, A^{-1}.

Remarque.
Il faut choisir au départ, soit lignes, soit colonnes, et ne plus changer après !

Exemple 23.

$$
\begin{array}{ccc}
A & & Id \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{9} L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{8}{9} L_3 & \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{3} & \frac{8}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow -\frac{2}{9} L_3 & \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -12 & 8 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\
Id & & A^{-1}
\end{array}
$$