4 Suites numériques

4.1 Vocabulaire et notations

Définition 1 (Suite numérique).
On appelle suite numérique *une fonction définie sur* $\mathbb{N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

On note généralement :

$$\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

et on dit que u_n *est le n-ième terme de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2 (Suite explicite/récurrente).

- *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* explicite, *si on a une expression de* u_n *en fonction de* n *:* $u_n = f(n)$
- *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* récurrente *(d'ordre 1), si on a une expression de* u_n *en fonction du terme précédent :* $u_n = f(u_{n-1})$

Exemple 3.

1. $u_n = 2n + 3$ *est une suite explicite. Avec*

$$u_0 = 2\times 0 + 3 = 3 \quad u_1 = 2\times 1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2\times 2 + 3 = 7$$

2. $u_n = 2^n + 3$ *est une suite explicite. Avec*

$$u_0 = 2^0 + 3 = 4 \quad u_1 = 2^1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2^2 + 3 = 7$$

3. $u_{n+1} = 2u_n + 3$ *avec* $u_0 = 3$ *est une suite récurrente. Avec*

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2\times u_0 + 3 = 9 \quad u_2 = 2\times u_1 + 3 = 21$$

4. $u_{n+1} = 2^{u_n} + 3$ *avec* $u_0 = 3$ *est une suite récurrente. Avec*

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2^{u_0} + 3 = 11 \quad u_2 = 2^{u_1} + 3 = 2051$$

Définition 4 (Suite croissante/décroissante/constante).
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

- croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
- décroissante *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- constante *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.

Méthode :

1. Pour déterminer les variations d'une suite, on regarde en général le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   - ▷ $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow$ la suite est croissante
   - ▷ $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow$ la suite est décroissante
2. Si la suite est géométrique (et non nulle), on regarde plutôt si le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Exemple 5.

1. $u_n = -2n + 3$ *est une suite décroissante.*

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0$$

D'où

$$u_{n+1} < u_n$$

2. $u_n = 2^n$ *est une suite croissante.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

et comme $u_n > 0$*, en multipliant l'inégalité par* u_n*, on trouve :*

$$u_{n+1} > u_n$$

3. $u_n = 3 \times (-4)^n$ *est une suite décroissante.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times (-4)^{n+1}}{3 \times (-4)^n} = 4 > 1$$

et comme $u_n < 0$*, en multipliant par* u_n*, l'inégalité change de sens et on trouve :*

$$u_{n+1} < u_n$$

4. $u_n = 12$ *est une suite constante.*

Définition 6 (Suite convergente/divergente)**.**
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

- ▷ convergente *lorsque* u_n *admet une limite* **finie** *en* $+\infty$*, c'est à dire :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$*, où* $c \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*
- ▷ divergente *lorsque la suite n'est pas convergente.*

Exemple 7.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ *donc la suite* $u_n = 2^n$ *est divergente.*

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n} = 1$ *donc la suite* $u_n = 1 - \dfrac{2}{n}$ *est convergente.*

3. La suite $u_n = (-1)^n$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$ *car elle oscille entre* -1 *et* 1*. Cette suite est donc divergente.*

Remarque.
Lorsqu'on étudie la convergence d'une suite, c'est toujours en $+\infty$! Faire tendre un nombre entier n vers 0 (ou tout autre valeur finie) n'a aucun sens.

Définition 8 (Suite minorée/majorée).
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- minorée *lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.*
- majorée *lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.*

Proposition 9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors la suite est convergente.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors la suite est convergente.*

Exemple 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Par récurrence :*
   - *$u_0 = 0 < 1$ Donc la propriété est vraie au rang 0.*
   - *Si $u_n < 1$, alors $\dfrac{u_n}{2} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < 1$. Donc la propriété est héréditaire.*
   - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$
2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{2}$$
or
$$u_n < 1 \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{u_n}{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{2} > 0$$
donc
$$u_{n+1} - u_n > 0$$
3. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*
4. *On sait qu'il existe une constante l telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. En passant l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$ à la limite, on obtient :*
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + 1}{2} \Leftrightarrow l = \frac{l+1}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow l = 1$$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4.2 Suites arithmétiques et suites géométriques

4.2.1 Suites arithmétiques

Définition 11 (Suite arithmétique).
On appelle suite arithmétique *de raison $r \in \mathbb{R}$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{(forme récurrente)} \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = u_0 + nr \quad \text{(forme explicite)}$$

Exemple 12.

1. $u_{n+1} = u_n + 4$ *est une suite arithmétique de raison* $r = 4$
2. $u_{n+1} = 3 - 2n$ *est une suite arithmétique de raison* $r = -2$ *et de premier terme* $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \frac{1}{3}n$ *est une suite arithmétique de raison* $r = \frac{1}{3}$ *et de premier terme* $u_0 = 0$

Proposition 13.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique. On a :*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = (u_0 + u_N) \times \frac{N+1}{2}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^{N} u_k = (u_{n_0} + u_N) \times \frac{N - n_0 + 1}{2}$$

Remarque.
Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

$$\textit{Somme des termes d'une suite arithmétique} = (\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}) \times \frac{\textit{nombre de termes}}{2}$$

Exemple 14.

1. $\sum_{k=0}^{31} -4n = (0 - 124) \times \frac{32}{2} = -1984$
2. $\sum_{k=2}^{16} 3 + 2n = (7 + 35) \times \frac{16 - 2 + 1}{2} = 315$

Proposition 15.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* r*.*

1. *Si* $r = 0$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante et converge vers* u_0*.*
2. *Si* $r \neq 0$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

4.2.2 Suites géométriques

Définition 16 (Suite géométriques)**.**
On appelle suite géométrique *de raison* $q \in \mathbb{R}$ *une suite qui vérifie* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \textit{(forme récurrente)} \quad \textit{ou} \quad u_{n+1} = u_0 \times q^n \quad \textit{(forme explicite)}$$

Exemple 17.

1. $u_{n+1} = 4u_n$ *est une suite géométrique de raison* $q = 4$
2. $u_{n+1} = 3 \times 2^n$ *est une suite géométrique de raison* $r = 2$ *et de premier terme* $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \dfrac{1}{3^n}$ *est une suite géométrique de raison* $r = \dfrac{1}{3}$ *et de premier terme* $u_0 = 1$

Proposition 18.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* q*. On a :*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^{N} u_k = u_{n_0} \times \frac{1 - q^{N-n_0+1}}{1 - q}$$

Remarque.
Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

$$\textit{Somme des termes d'une suite géométrique} = \textit{premier terme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - \textit{raison}}$$

Exemple 19.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{31} 3 \times 2^n = 3 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} = 3(2^{32} - 1)$

Proposition 20.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q| < 1 \quad \textit{ou} \quad u_0 = 0$$

Remarque.
Si $q \in \mathbb{R}$*,* $|q|$ *désigne la valeur absolue de* q*. Si* $q \in \mathbb{C}$*,* $|q|$ *désigne le module de* q*.*

Exemple 21.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{300} \times (1,1)^n = +\infty$ *car* $q = 1,1 > 1$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ *car* $q = \dfrac{1}{2} < 1$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ *car* $|q| = \dfrac{1}{5} < 1$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right)^n = 0$ *car* $|q| = \dfrac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}{3} = \dfrac{2}{3} < 1$