1 Fonction réciproque

1.1 Bijection

Définition 1 (Ensemble image).
Soit f une fonction définie sur D_f. Soit $I \subseteq D_f$. On note $f(I)$ l'ensemble image *de I par f défini par :*

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in I, f(x) = y\}$$

Exemple 2.
Si on considère $f(x) = x^2$, alors :

- ▷ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$
- ▷ $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
- ▷ $f([1, 4[) = [1, 16[$
- ▷ $f(]-2, 3]) = [0, 9]$

Définition 3 (Fonction injective, surjective et bijective).
Soit $f : D_f \to E$ une fonction définie sur D_f et à valeur dans E. On dit que f est :

- ▷ injective *de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe* ***au plus un*** *antécédent de y par f. Ce qui s'écrit encore :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D_f^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- ▷ surjective *de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe* ***au moins un*** *antécédent de y par f. Ce qui s'écrit encore :*

$$\forall y \in E, \quad \exists x \in D_f \ \text{ tel que } \ f(x) = y$$

- ▷ bijective *de D_f dans E si et seulement si elle est injective* ***et*** *surjective de D_f dans E. Dans ce cas, pour tout y dans E il existe* ***exactement un*** *antécédent de y par f.*

Exemples 1.

1. *La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est injective. En effet, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 \in \mathbb{R}_+$,*

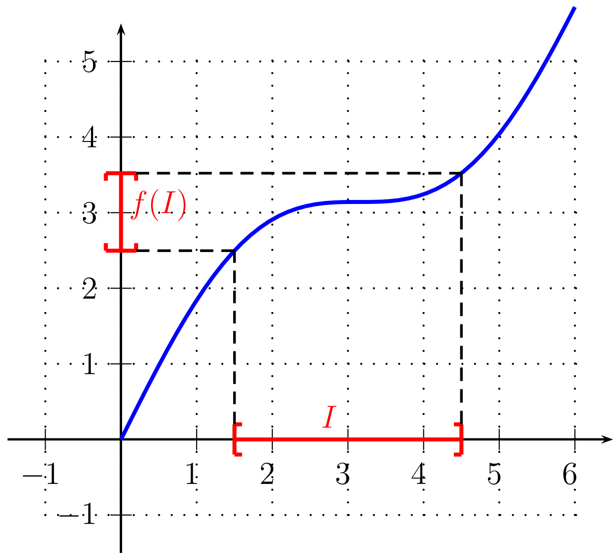
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \ \text{ ou } \ x_1 = -x_2$$

   or comme x_1 et x_2 sont positifs, on a forcément $x_1 = x_2$.

2. *La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$, ce qui signifie que $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par f.*

3. *La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est surjective. En reprenant les deux raisonnements précédents, on a bien que f est injective et surjective.*

Théorème 4 (DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI))**.**
Soit I un intervalle et soit f un fonction continue sur I. Alors $f(I)$, l'ensemble image de I par f, est un intervalle.



Corollaire 5.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$f(a) \times f(b) < 0$$

L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarques.

1. *Il n'y a pas forcément unicité de la solution*
2. *La réciproque est fausse*

Proposition 6.
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I alors f est bijective de I dans $f(I)$.

Exemple 7.
Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Pour tout $x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ et sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Comme $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, on a $f(]-\infty, 2[) = f(]2, +\infty[) =]1, +\infty[$, et on en déduit que f est bijective de $]-\infty, 2[$ dans $]1, +\infty[$ et de $]2, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

1.2 Fonction réciproque

Définition 8 (Fonction réciproque).
Soit f une fonction bijective de D dans E. On appelle fonction réciproque *de f, la fonction, notée f^{-1}, définie de E dans D par :*

$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(x) = b \Leftrightarrow f(b) = x$$

Ceci signifie que f^{-1} est la fonction qui donne l'antécédent de x par f (cet antécédent est unique puisque f est supposée bijective).

Exemples 2.

1. *$f(x) = e^x$ est définie et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$, donc $f^{-1}(x) = \ln(x)$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2. *$g(x) = x^2$ est définie et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$, donc $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Remarque.
Attention a ne pas confondre la fonction réciproque de f, notée $f^{-1}(x)$, et l'inverse de $f(x)$, noté $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$.

Méthode
Pour déterminer l'expression de la fonction réciproque f^{-1}, il faut trouver x tel que $f(x) = y$. L'expression de x sera alors donnée en fonction de y.

Exemple 9.
Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ avec $x \in]2, +\infty]$.
On a vu dans l'exemple 7 que f est bijective de $]2, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$. Soit $y \in]1, +\infty[$ tel que :

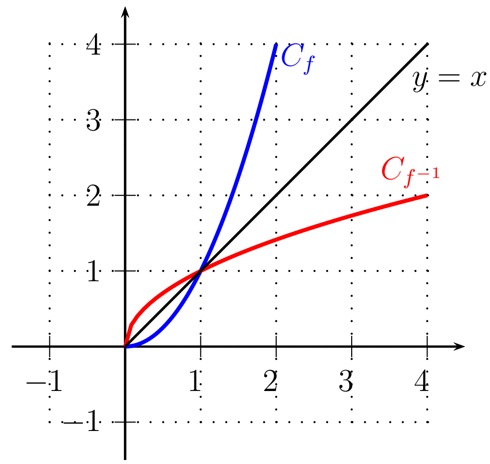
$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \\
&\Leftrightarrow x - 1 = y(x-2) = xy - 2y \\
&\Leftrightarrow x - xy = 1 - 2y \quad \textit{(on isole les termes avec des x à gauche et les termes sans x à droite)} \\
&\Leftrightarrow x(1-y) = 1 - 2y \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{1-y}
\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \dfrac{1-2y}{1-y}$ sur $]1, +\infty[$.

Proposition 10.
Soit f une fonction bijective de D dans E. Alors :

1. *$\forall x \in D$, $f^{-1} \circ f(x) = x$.*
2. *$\forall x \in E$, $f \circ f^{-1}(x) = x$.*
3. *$\forall \in D$, $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.*

4. *Les courbes représentative des fonctions f et f^{-1}, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, sont la symétrie l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $x = y$.*



Si de plus la fonction f est dérivable et que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors f^{-1} est dérivable sur E et pour tout $x \in E$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Remarque.
Les points 1. et 2. permettent de montrer qu'une fonction g est la réciproque de f.

Exemple 11.
Soient $f(x) = x^2 + 2x + 2$ définie sur $]-1, +\infty[$ et $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$ définie sur $]1, +\infty[$.

f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 > 0$, donc f est strictement croissante, elle est donc bijective de $]-1, +\infty[$ dans $f(]-1, +\infty[) =]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$g \circ f = \sqrt{f(x) - 1} - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1 = \sqrt{(x+1)^2} - 1 = |x+1| - 1 = x$$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$f \circ g = g(x)^2 + 2g(x) + 2 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 + 2\sqrt{x-1} - 2 + 2 = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + 2\sqrt{x-1} = x$$

Donc, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g(x) = f^{-1}(x)$.

1.3 Arccos - Arcsin - Arctan

Définition 12 (Fonction Arccos)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

On appelle Arccos *la fonction réciproque de f.*

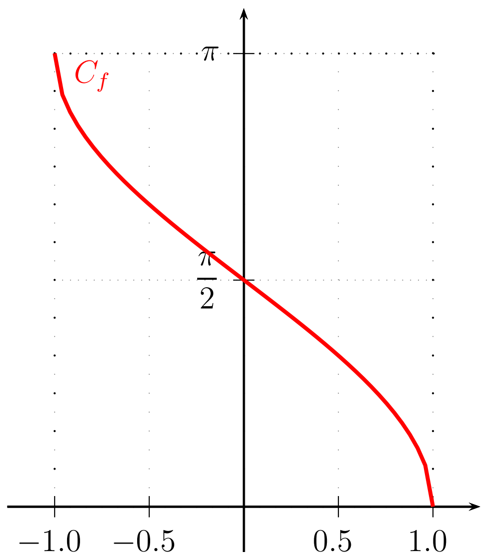
Proposition 13 (Propriétés de la fonction Arccos).
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \text{Arccos}(x) \end{aligned}$$

- *La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et sa dérivée $(-\sin)$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. La fonction Arccos est donc dérivable sur $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$ et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

On a alors :

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))}$$

Or grâce à la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

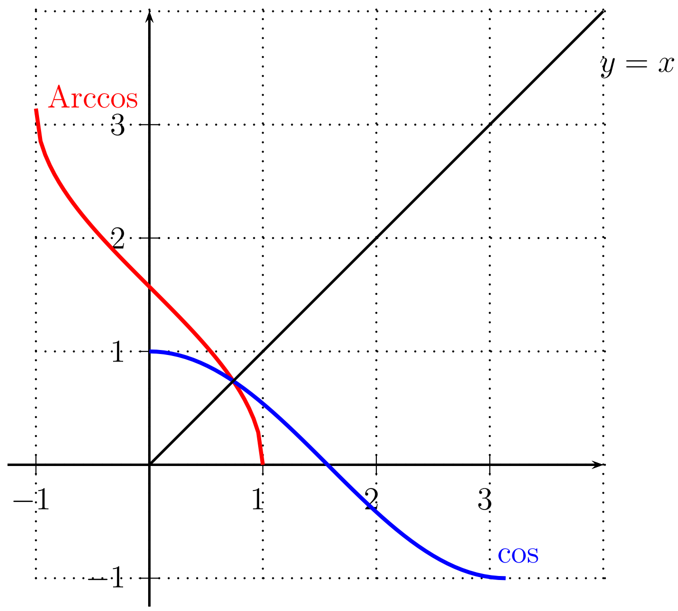
on a :

$$\begin{aligned} \cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 &\Leftrightarrow x^2 + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - x^2 > 0 \;\; \text{puique } x \in]-1,1[\\ &\Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de Arccos est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de cos par rapport à la droite $y = x$.



$\square$

Méthode
Pour déterminer la valeur de $\text{Arccos}(x)$, on se pose la question : *Quel est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x ?*

Exemple 14.
$\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ *"Quel est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut $\dfrac{1}{2}$?"* $= \dfrac{\pi}{3}$

Définition 15 (Fonction Arcsin)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

On appelle Arcsin *la fonction réciproque de f.*

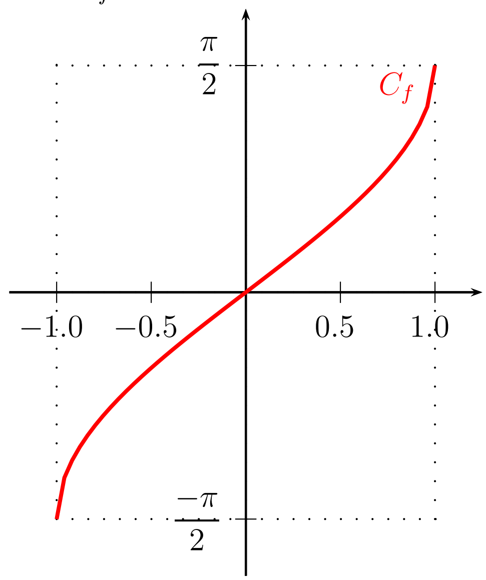
Proposition 16 (Propriétés de la fonction Arcsin)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \text{Arcsin}(x) \end{aligned}$$

▷ *La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

▷ *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée (cos) ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arcsin est donc dérivable sur $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$ et de la même manière que pour Arccos, on a :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}$$

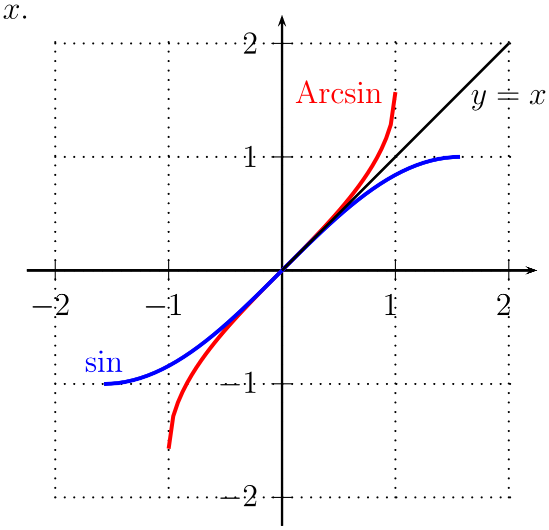
avec

$$\begin{aligned}
\cos^2(\text{Arcsin}(x)) + \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 &\Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(x)) + x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2 > 0 \quad \text{puique } x \in]-1, 1[\\
&\Leftrightarrow \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La courbe représentative de Arcsin est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de sin par rapport à la droite $y = x$.



$\square$

Méthode
Pour déterminer la valeur de $\text{Arcsin}(x)$, on se pose la question : *Quel est l'angle de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dont le sinus vaut x ?*

Exemple 17.
$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$ = "*Quel est l'angle de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dont le sinus vaut* $\frac{1}{2}$ *?*" $= \frac{\pi}{6}$

Définition 18 (Fonction Arctan)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan(x)$$

On appelle Arctan *la fonction réciproque de f.*

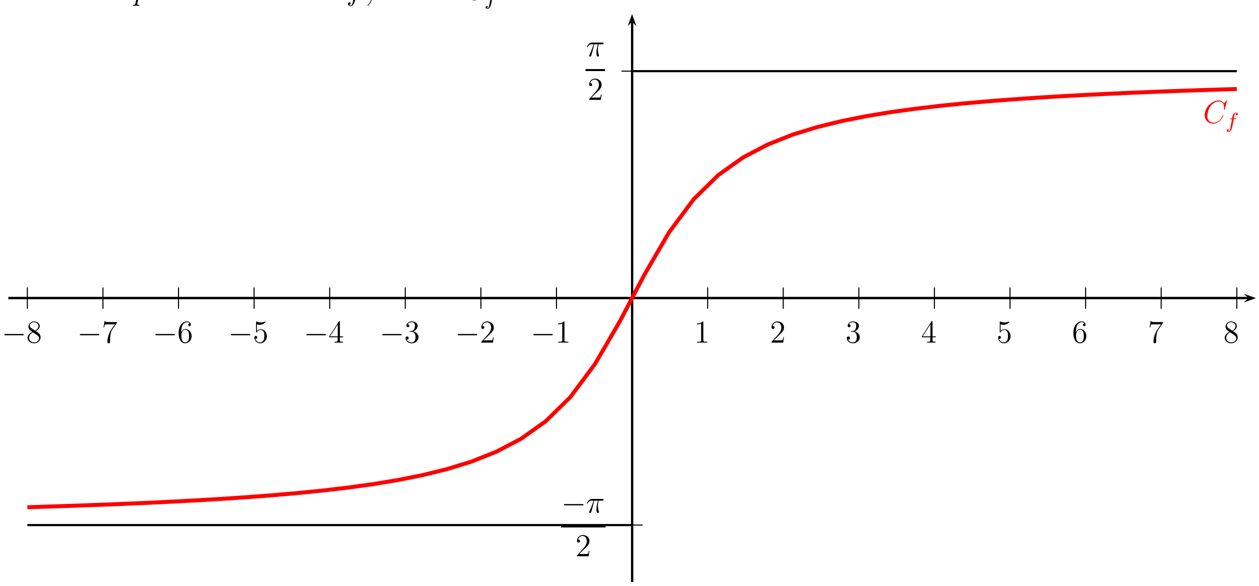
Proposition 19 (Propriétés de la fonction Arcsin)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \longmapsto \text{Arctan}(x)$$

- *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

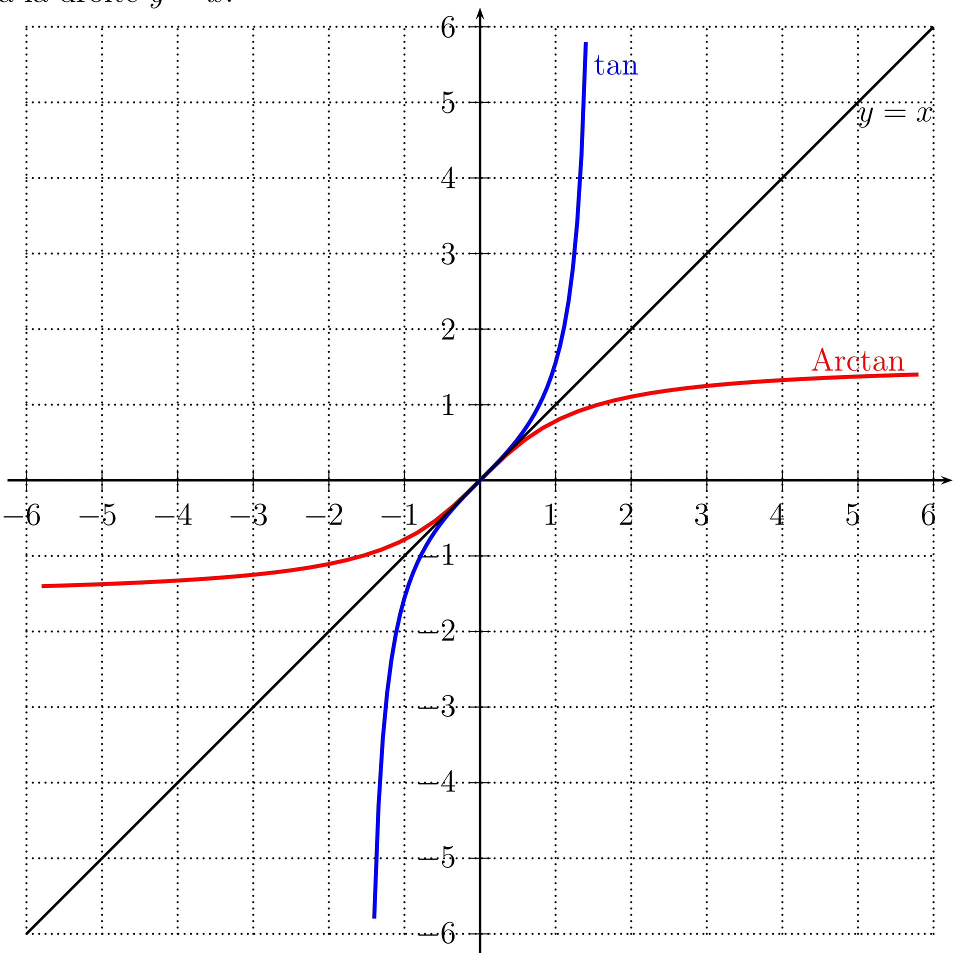
- *La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :*



Démonstration.
La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée $(1+\tan^2)$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arctan est donc dérivable sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$ et de la même manière que précédemment,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

La courbe représentative de Arctan est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de tan par rapport à la droite $y = x$.



□

Méthode
Pour déterminer la valeur de Arctan(x), on se pose la question : *Quel est l'angle de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dont la tangente vaut* x *?*

Exemple 20.
Arctan(1) = *"Quel est l'angle de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dont la tangente vaut* 1 *?"* $= \frac{\pi}{4}$