1 Rappels : Étude de fonctions

1.1 Polynômes du second degré

Définition 1 (Polynôme du second degré).
On appelle polynôme du second degré *ou* trinôme *toute expression pouvant se mettre sous la forme :*

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemple 2.

- ▷ $P_1(x) = 2x^2 + 4x - 5$ *est un trinôme*
- ▷ $P_2(x) = x^2 - 1$ *est un trinôme avec* $b = 0$
- ▷ $P_3(x) = x + 1$ *n'est pas un trinôme, c'est un polynôme de degré* 1

Remarque.

- ▷ $P_4(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ *est un polynôme de degré* 3
- ▷ $P_5(x) = 5x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x + 4$ *est un polynôme de degré* 4

Définition 3 (Racine d'un polynôme).
On appelle racine *d'un polynôme $P(x)$ une solution de l'équation $P(x) = 0$*

Définition 4 (Discriminant).
On appelle discriminant *du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Proposition 5.

- ▷ *Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet* ***2 racines distinctes*** *données par :*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ▷ *Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet* ***une unique racine*** *donnée par :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- ▷ *Si $\Delta < 0$, alors le polynôme P n'admet* ***aucune racine réelle***

Exemple 6.

- ▷ $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$
  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$
  P_1 *possède 2 racines :* $x_1 = \dfrac{-3+1}{-2} = 2$ *et* $x_2 = \dfrac{-3-1}{-2} = 1$
- ▷ $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$
  $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
  P_2 *possède 1 racine :* $x_0 = -\dfrac{-4}{2} = 2$
- ▷ $P_3(x) = x^2 + x + 1$
  $\Delta = -3$
  P_3 *ne possède aucune racine réelle*

Proposition 7.
Soit $P(x)$ un trinôme de discriminant Δ.

- ▷ *Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a sauf entre ses racines. Plus précisément, si $x_1 < x_2$, on a :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		*signe de a*	0	*signe de* $-a$	0	*signe de a*	

- ▷ *Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est toujours du signe de a et s'annule en x_0. On a :*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		*signe de a*	0	*signe de a*	

- ▷ *Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas. On a :*

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	*signe de a*	

1.2 Dérivation

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	Ensemble de définition	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
k où $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

Opérations sur les dérivées
Soient f et g deux fonctions et k une constante réelle. On a :

- ▷ $(f+g)' = f' + g'$
- ▷ $(kf)' = kf'$
- ▷ $(fg)' = f'g + fg'$
- ▷ $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ (Si g à valeurs $\neq 0$)
- ▷ $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (Si g à valeurs $\neq 0$)
- ▷ $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$
- ▷ $(f^n)' = nf'f^{n-1}$
- ▷ $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ (Si f à valeurs > 0)
- ▷ $(\cos(f))' = -f'\sin(f)$
- ▷ $(\sin(f))' = f'\cos(f)$
- ▷ $(e^f)' = f'e^f$
- ▷ $(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$ (Si f à valeurs > 0)

Sens de variation et tangente

Proposition 8.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- *Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I*
- *Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I*
- *Si pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I*

Définition 9 (Tangente)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère (O, I, J). On appelle tangente *à $\mathcal{C}_f$ en a la droite passant par le point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.*

Proposition 10.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a dans un repère (O, I, J). L'équation réduite de T est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

1.3 Limites

Limites en l'infini des fonctions usuelles

$f(x)$	Ensemble de définition	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
k où $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	k	k
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$, n pair	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$, n impair	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	0	0
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	Pas défini	$+\infty$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	Pas de limite	Pas de limite
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	Pas de limite	Pas de limite
e^x	$\mathbb{R}$	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	Pas défini	$+\infty$

Autres limites à connaître

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Opérations sur les limites
Soient f et g deux fonctions. a désigne ici un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\times g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Si on obtient une forme indéterminée (FI), on ne peut pas conclure de cette manière. Les FI sont :

- $+\infty - \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $0 \times \infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- 1^{∞}

Proposition 11.
Soient f et g deux fonctions. a, b et c désignent ici des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Exemple 12.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x+1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x-2) = -\infty$

1.4 Fonction valeur absolue

Définition 13 (Valeur absolue)**.**
La fonction valeur absolue *est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f(x) = x & si \;\; x \geq 0 \\ f(x) = -x & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$$

La valeur absolue d'un nombre réel x se note $|x|$. On a alors :

$$|x| = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 14. *Soient x et y des réels.*

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$
5. $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y \Leftrightarrow x \in [-y, y]$
6. $|x| \geq y \Leftrightarrow (x \leq -y \text{ ou } x \geq y) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -y] \cup [y, +\infty[$
7. $\sqrt{x^2} = |x|$

Exemple 15.

- ▷ $|x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \textit{ ou } x+1 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \textit{ ou } x = -3$
- ▷ $|2x+1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2x+1 \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 2x \leq 3 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$
- ▷ $|-x+3| > 6 \Leftrightarrow -x+3 < -6 \textit{ ou } -x+3 > 6 \Leftrightarrow -x < -9 \textit{ ou } -x > 3 \Leftrightarrow x > 9 \textit{ ou } x < -3$

Proposition 16.
La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$|x|' = \begin{cases} 1 & si \;\; x > 0 \\ -1 & si \;\; x < 0 \end{cases}$$