3 Polynômes

3.1 L'espace des polynômes

Définition 1 (Polynôme, Degré, Coefficient).
On appelle polynôme *à coefficients réels (respectivement complexes) toute expression de la forme :*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

où :

- $n \in \mathbb{N}$ *est appelé* degré *de* P *et noté* $\deg(P)$,
- $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $a_i \in \mathbb{R}$ *(respectivement* $a_i \in \mathbb{C}$*)*,
- a_i *est le* coefficient *de* X^i.

Définition 2 (Ensemble des polynômes).
On note $\mathbb{R}[X]$ *(resp.* $\mathbb{C}[X]$*) l'*ensemble des polynômes *à coefficients réels (resp. complexes).*

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on note* $\mathbb{R}_n[X]$ *(resp.* $\mathbb{C}_n[X]$*) l'*ensemble des polynômes *à coefficients réels (resp. complexes) de degré inférieur ou égal à* n.

Exemple 3.

1. $P(X) = 2X^3 - 3X \in \mathbb{R}[X]$ *et* $\deg(P) = 3$
2. $Q(X) = iX^2 + 1 - i \in \mathbb{C}[X]$ *et* $\deg(Q) = 2$
3. $R(X) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X^2} + 2 \notin \mathbb{R}[X]$
4. $S(X) = \left(\sqrt{X}\right)^2 + 2\sqrt{X} - 1 \notin \mathbb{R}[X]$

Proposition 4 (Propriétés du degré).
Soient P *et* Q *deux polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *(resp.* $\mathbb{C}[X]$*).*

1. $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P \times Q \in \mathbb{C}[X]$*)*, $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda P \in \mathbb{C}[X]$*)*, $\deg(\lambda P) = \deg(P) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.
3. $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P + Q \in \mathbb{C}[X]$*)*, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ *avec égalité si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
4. $P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$ *(resp.* $P \circ Q \in \mathbb{C}[X]$*)*, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemple 5.
$P(X) = X^2 + 1, \quad Q(X) = X^3, \quad R(X) = -X^2 + X$

- ▷ $P \times Q = X^5 + X^3$, $\deg(P \times Q) = 3 + 2 = 5$,
- ▷ $4P = 4X^2 + 4$, $\deg(4P) = 2$,
- ▷ $P + Q = X^3 + X^2 + 1$, $\deg(P + Q) = max(\deg(P), \deg(Q)) = 3$,
- ▷ $P \circ Q = (X^3)^2 + 1 = X^6 + 1$, $\deg(P \circ Q) = 3 \times 2 = 6$,
- ▷ $P + R = X + 1$, $\deg(P + R) = 1 \leq max(\deg(P), \deg(R)) = 2$,

Proposition 6.
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$).

1. $P(X) = 0 \Leftrightarrow$ *tous les coefficients sont nuls*
2. $P(X) = Q(X) \Leftrightarrow \deg(P) = \deg(Q)$ *et tous les coefficients de P et Q sont égaux deux à deux*

Démonstration.

1. $\Leftarrow$: Si tous les coefficients a_i de P sont nuls, on a $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i = \sum_{i=0}^{\deg(P)} 0 \times X^i = 0$

   $\Rightarrow$: On suppose maintenant que $P(X) = 0$.
   En particulier, on a $P(0) = a_0 = 0$. De plus, on a aussi $P'(X) = 0$ et donc $P'(0) = a_1 = 0$. En dérivant $\deg(P)$-fois P, on trouve que pour tout $i \in [\![0, \deg(P)]\!]$, $P^{(i)}(0) = a_i = 0$ et donc tous les coefficients de P sont nuls.

2. On remarque d'abord que :

$$P(X) = Q(X) \Leftrightarrow P(X) - Q(X) = (P - Q)(X) = 0$$

   Il suffit donc d'appliquer le point 1. au polynôme $P - Q$.
   On note $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\deg(Q)} b_i X^i$.
   $\Leftarrow$: Supposons que $n = \deg(P) = \deg(Q)$ et que tous les coefficients de P et Q sont égaux deux à deux, c'est à dire $\forall i \in [\![0, n]\!], a_i = b_i$.

$$P(X) - Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i - \sum_{i=0}^{n} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) X^i = \sum_{i=0}^{n} 0 X^i = 0$$

   et donc $P(X) = Q(X)$.
   $\Rightarrow$: On suppose maintenant que $P(X) = Q(X)$.
   On sait alors que $\deg(P) = \deg(Q)$ et que $(P - Q)(X) = 0$. Les coefficients du polynôme $P - Q$ étant les $a_i - b_i$, on sait grâce au point 1. que pour tout $i \in [\![0, \deg(P)]\!], a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i$.

□

3.2 Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 7 (Division euclidienne, Quotient, Reste)**.**
Soient P et D deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
Faire la division euclidienne *de P par D c'est trouver les polynômes Q et R tels que :*

$$P(X) = Q(X) \times D(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < \deg(D)$*. Le polynôme Q est appelé* quotient *et le polynôme R est appelé* reste*.*

Méthode : Pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme P par un polynôme D, et donc trouver les polynômes Q et R, il **faut** poser la division.

Exemple 8.
Faire la division euclidienne de $P(X) = X^2 + 3X + 2$ par $D(X) = X - 5$.

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^2 + 3X + 2 & X - 5 \\ \cline{3-3}
- & \underline{(X^2 - 5X)} & X + 8 \quad \leftarrow Q(X) \\
 & 8X + 2 & \\
- & \underline{(8X - 40)} & \\
R(X) \rightarrow & 42 &
\end{array}$$

Donc

$$P(X) = (X + 8)(X - 5) + 42$$

Remarques.

1. *Les polynômes Q et R sont uniques.*
2. *Il faut au plus* $\deg(P) - \deg(D) + 1$ *étapes pour effectuer la division euclidienne de P par D.*

3.3 Racines d'un polynôme

Définition 9 (Racine)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).
On dit que a est une racine *de P si et seulement si $P(a) = 0$.*

Exemple 10.

1. $P(X) = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ *admet* 1 *comme racine.*
2. $Q(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ *admet* i *comme racine.*

Proposition 11.
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

$$a \text{ est racine de } P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ (resp. } Q \in \mathbb{C}[X]) \text{ tel que } \deg(Q) = \deg(P) - 1 \text{ et } P(X) = (X-a)Q(X)$$

C'est à dire que a est racine de P si et seulement si on peut factoriser P par $(X - a)$.

Démonstration.

- $\Leftarrow$: Si $P(X) = (X - a)Q(X)$ alors $P(a) = 0 \times Q(a) = 0$, donc a est racine de P.
- $\Rightarrow$: Supposons maintenant que a est racine de P. On note $P(X) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} c_i X^i$.

  On a alors
  $$P(a) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} c_i a^i = 0$$
  d'où :
  $$P(X) = P(X) - P(a) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} c_i X^i - \sum_{i=0}^{\deg(P)} c_i a^i = \sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i (X^i - a^i)$$
  Pour prouver qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ (ou $Q \in \mathbb{C}[X]$) tel que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ et $P(X) = (X - a)Q(X)$, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, \deg(P)]\!]$, il existe un polynôme $Q_i \in \mathbb{R}[X]$ (ou $Q_i \in \mathbb{C}[X]$) tel que $\deg(Q_i) = i - 1$ et $X^i - a^i = (X - a)Q_i(X)$.

  En effet, si de tels polynômes existent, on a alors :
  $$P(X) = \sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i (X^i - a^i) = \sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i (X - a)Q_i(X) = (X - a) \sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i Q_i(X)$$
  et grâce aux propriétés du degré, on sait que $\sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i Q_i(X) \in \mathbb{R}[X] \left(\text{ou } \sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i Q_i(X) \in \mathbb{C}[X] \right)$ et $\deg \left(\sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i Q_i(X) \right) = \max \left(\deg(Q_i) | i \in [\![1, \deg(P)]\!] \right) = \deg(P) - 1$.

  Prouvons alors par récurrence que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_i tel que $\deg(Q_i) = i-1$ et $X^i - a^i = (X - a)Q_i(X)$.

  Initialisation : Pour $i = 1$, $X - a = (X - a) \times 1$. En posant $Q_1(X) = 1$, on a bien $\deg(Q_1) = 0$ et $X - a = (X - a)Q_1(X)$. La propriété est donc vraie au rang 1.

  Hérédité : On suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et on prouve qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe un polynôme Q_n tel que $\deg(Q_n) = n - 1$ et $X^n - a^n = (X - a)Q_n(X)$. Pour trouver une expression reliant $X^{n+1} - a^{n+1}$ à $X^n - a^n$, on effectue la division euclidienne de $X^{n+1} - a^{n+1}$ par $X^n - a^n$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^{n+1} - a^{n+1} & X^n - a^n \\
\cline{2-2}
-\ \underline{(X^{n+1} - a^n X)} & X \\
a^n X - a^{n+1} &
\end{array}
$$

On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
X^{n+1} - a^{n+1} &= (X^n - a^n)X + a^n X - a^{n+1} \\
&= (X-a)Q_n(X)X + a^n(X-a) \\
&= (X-a)\left(Q_n(X)X + a^n\right)
\end{aligned}
$$

et en posant $Q_{n+1} = Q_n(X)X + a^n$, on vient de trouver un polynôme tel que $\deg(Q_{n+1}) = n$ et $X^{n+1} - a^{n+1} = (X-a)Q_{n+1}(X)$ et donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On vient de prouver que pour tout $i \in [\![1, \deg(P)]\!]$, il existe un polynôme $Q_i \in \mathbb{R}[X]$ (ou $Q_i \in \mathbb{C}[X]$) tel que $\deg(Q_i) = i - 1$ et $X^i - a^i = (X-a)Q_i(X)$.

Finalement, en posant $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\deg(P)} c_i Q_i(X)$, la proposition est prouvée.

$\square$

Exemple 12.

1. *Soit* $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. *Factoriser* P *dans* $\mathbb{R}[X]$.
   1 *est une racine de* P, *on peut donc factoriser par* $(X-1)$.
   $P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$
   2 *est une racine de* P, *on peut donc factoriser par* $(X-2)$.
   $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$

2. *Soit* $Q(X) = 2iX^2 + (i+1)X + 1 + i$. *Factoriser* Q *dans* $\mathbb{C}[X]$.
   i *est une racine de* Q, *on peut donc factoriser par* $(X-i)$.
   $Q(X) = (X-i)(2iX - 1 + i)$

Remarque.

- ▷ *Factoriser* P *dans* $\mathbb{R}[X]$, *c'est trouver toutes les racines réelles de* P *et décomposer* P *en produit de polynômes de* $\mathbb{R}[X]$.
- ▷ *Factoriser* P *dans* $\mathbb{C}[X]$, *c'est trouver toutes les racines complexes de* P *et décomposer* P *en produit de polynômes de* $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 13.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
Si le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est nul, alors a est racine de P.

Exemple 14.
Faire la division euclidienne de $P(X) = X^3 + 4X^2 - 3X - 2$ par $D(X) = X - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + 4X^2 - 3X - 2 & X - 1 \\
\cline{2-2}
-\ \underline{(X^3 - \ X^2)} & X^2 + 5X + 2 \\
5X^2 - 3X - 2 & \\
-\ \underline{(5X^2 - 5X)} & \\
2X - 2 & \\
-\ \underline{(2X - 2)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Donc

$$P(X) = (X^2 + 5X + 2)(X - 1)$$

et donc 1 est racine de P.

Définition 15 (Racine multiple, Multiplicité)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).
On dit que a est une racine multiple *de* multiplicité *$m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe une polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $Q \in \mathbb{C}[X]$) tel que $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.*

Exemple 16.

1. $P(X) = X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$,
   -2 est une racine double de P.
2. $Q(X) = X^3 + 3X^2 - 9X + 5 = (X - 1)(X^2 + 4X - 5) = (X - 1)^2(X + 5)$,
   1 est une racine double et -5 est une racine simple de Q.

Proposition 17.
Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

$$a \text{ est racine de multiplicité } m \in \mathbb{N}^* \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \forall k < m,\ P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Remarque.
Si a est une racine de P', a n'est pas forcément une racine de P ! Par exemple, si $P(X) = X^2 + 1$, $P'(X) = 2X$. On a alors $P'(0) = 0$ mais $P(0) \neq 0$.

Proposition 18.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ (i.e. $a \in \mathbb{C}$ mais $a \notin \mathbb{R}$).
Si a est racine de P, alors $\bar{a}$ est aussi racine de P.

Remarque.
Il ***faut*** *que P soit à coefficients* ***réels****.*

Exemple 19.

1. $P(X) = X^2 + 1$,
   i et $-i$ sont racines de P

2. $Q(X) = iX^2 + (3 - i)X + (-1 - 2i)$,
   i est racine de Q mais $-i$ ne l'est pas.

Remarque.
Réciproquement, si les conjugués de toutes les racines de P sont également racine de P, alors $P \in \mathbb{R}[X]$.

3.4 Décomposition en éléments simples (DES)

On s'intéresse aux fonctions rationnelles, c'est à dire aux fonctions de la forme :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{où } (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$$

Une telle fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.

Le but de cette décomposition, est de calculer des intégrales de fonctions rationnelles (dont on ne connait pas de primitive) telles que $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$ ou $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+3x^2+x-5}dx$.

3.4.1 Partie entière et partie fractionnaire

Proposition 20.
Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle.
Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que,

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \textit{avec } \deg(R) < \deg(Q)$$

- ▷ *E est appelé* partie entière *de f.*
- ▷ *$\dfrac{R}{Q}$ est appelé* partie fractionnaire *de f.*

Méthode : Pour trouver la partie entière et la partie fractionnaire d'une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on fait la division euclidienne de P par Q.

Exemple 21.
Trouver la partie entière et la partie fractionnaire de $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 1}$.

1. *On fait la division euclidienne de* $P(X) = X^4 - 3X + 2$ *par* $Q(X) = X^2 - 5X + 1$.
   En posant la division, on trouve :
$$X^4 - 3X + 2 = (X^2 + 5X + 24)(X^2 - 5X + 1) + (112X - 22)$$
2. *On divise le résultat de la division euclidienne par* Q.
   On obtient alors :
$$\frac{X^4 - 3X + 2}{X^2 - 5X + 1} = X^2 + 5X + 24 + \frac{112X - 22}{X^2 - 5X + 1}$$
3. *On a donc :*
$$f(x) = x^2 + 5x + 25 + \frac{112x - 22}{x^2 - 5x + 1}$$

La partie entière E est facilement intégrable puisqu'il s'agit d'un polynôme. En revanche, ce n'est souvent pas le cas pour la partie fractionnaire. On cherche donc une manière de décomposer $\dfrac{R}{Q}$ pour pouvoir intégrer facilement.

Dans toute la suite, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **avec** $\deg(P) < \deg(Q)$**.**

L'idée de la DES est de transformer $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ en une somme de fractions,
$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \cdots$$
où :

- ▷ $\deg(P_i) < \deg(Q_i)$
- ▷ $\deg(Q_i) = 1 \quad \text{ou} \quad 2$
- ▷ Q_i n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

Exemple 22.
La DES de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ *est*
$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

3.4.2 Cas de première espèce

<u>Ordre 1</u>

Si on peut factoriser Q en produit de polynômes de la forme $(X-\alpha_i)$ tous distincts (i.e. $Q(X) = \beta(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots$), alors il existe des constantes a_1, a_2, $\cdots$ telles que :

$$Q(x) = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \cdots \tag{1}$$

Exemple 23.
Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)(x+3)}$. *La forme de la DES est :*

$$f(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \frac{a_3}{x+3}$$

Il faut donc trouver les constantes a_1, a_2 et a_3.

Méthode 1 : Par identification (à éviter)

Après avoir décomposé f en somme d'éléments de la forme $\dfrac{a_1}{x-\alpha_i}$,

1. On réduit f au même dénominateur.
2. On développe le numérateur.
3. On identifie les coefficients.
4. On résout le système pour trouver les a_i.

Exemple 23 (suite - Méthode 1).
On sait que

$$f(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \frac{a_3}{x+3}$$

d'où en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(x) = \frac{a_1(x-2)(x+3) + a_2(x-1)(x+3) + a_3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

En développant le numérateur, on a :

$$f(x) = \frac{(a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1+2a_2-3a_3)x - 6a_1 - 3a_2 + 2a_3}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 & = & 1 \\ a_1+2a_2-3a_3 & = & -3 \\ -6a_1-3a_2+2a_3 & = & 5 \end{cases}$$

Finalement, en résolvant le système, on trouve :

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{-3}{4} \\ \\ a_2 &= \dfrac{3}{5} \\ \\ a_3 &= \dfrac{23}{20} \end{cases}$$

Méthode 2 :
Pour calculer a_i,

1. On multiplie l'équation (1) par $(x - \alpha_i)$.
2. On remplace x par α_i.

Exemple 23 (suite - Méthode 2).
On sait que

$$f(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \frac{a_3}{x+3} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+3)} \tag{2}$$

Pour trouver a_1, on multiplie l'expression (2) par $(x - 1)$, on obtient :

$$a_1 + \frac{a_2(x-1)}{x-2} + \frac{a_3(x-1)}{x+3} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-2)(x+3)}$$

Puis on remplace x par 1, on a alors :

$$a_1 = \frac{-3}{4}$$

De la même manière, pour trouver a_2 on multiplie l'expression (2) par $(x - 2)$,

$$\frac{a_1(x-2)}{x-1} + a_2 + \frac{a_3(x-2)}{x+3} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x+3)}$$

puis on remplace x par 2,

$$a_2 = \frac{3}{5}$$

Et pour trouver a_3, on multiplie (2) par $(x + 3)$,

$$\frac{a_1(x+3)}{x-1} + \frac{a_2(x+3)}{x-2} + a_3 = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)}$$

et on remplace x par -3,

$$a_3 = \frac{23}{20}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{x-1} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} + \frac{23}{20} \times \frac{1}{x+3}$$

Ordre supérieur à 1

Si on peut factoriser Q en produit de polynômes de la forme $(X-\alpha_i)$ et que Q possède au moins une racine multiple (i.e. $Q(X)=\beta(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}(X-\alpha_{n+1})\cdots$ avec $m_i>1$), alors il existe des constantes $a_{1,1},\cdots,a_{1,m_1},\cdots,a_{n,1},\cdots,a_{n,m_n},a_{n+1},\cdots$ telles que :

$$Q(x)=\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1}+\frac{a_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{a_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{a_{n,1}}{x-\alpha_n}+\cdots\frac{a_{n,m_n}}{(x-\alpha_n)^{m_n}}+\frac{a_{n+1}}{x-\alpha_{n+1}}+\cdots \tag{3}$$

Exemple 24.
Soit $f(x)=\dfrac{2x}{(x-2)^2(x+1)}$. *La forme de la DES est :*

$$f(x)=\frac{a_{1,1}}{x-2}+\frac{a_{1,2}}{(x-2)^2}+\frac{a_2}{x+1}$$

Il faut donc trouver les constantes $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ et a_2.

Méthode :

1. On calcule a_{n+1}, a_{n+2}, $\cdots$ en utilisant la méthode 2 du paragraphe précédent.
2. On calcule les constantes correspondant aux plus grandes puissance a_{i,m_i}. Pour cela, on multiplie l'équation (3) par $(x-\alpha_i)^{m_i}$ puis on remplace x par α_i.
3. On calcule les constantes $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $\cdots$, $a_{n,1}$ (correspondant à la plus petite puissance). Pour cela, on multiplie l'équation (3) par x puis on fait tendre x vers $+\infty$.
4. Finalement et si besoin, on remplace x par autant de valeurs que nécessaire pour déterminer les dernières constantes.

Exemple 24 (suite).

On sait que

$$f(x)=\frac{a_{1,1}}{x-2}+\frac{a_{1,2}}{(x-2)^2}+\frac{a_2}{x+1}=\frac{2x}{(x-2)^2(x+1)} \tag{4}$$

Pour trouver a_2, on multiplie l'expression (4) par $(x+1)$, on obtient :

$$\frac{a_{1,1}(x+1)}{x-2}+\frac{a_{1,2}(x+1)}{(x-2)^2}+a_2=\frac{2x}{(x-2)^2}$$

puis on remplace x par -1,

$$a_2=-\frac{2}{9}$$

Pour trouver $a_{1,2}$ (coefficient de la plus grande puissance), on multiplie l'expression (4) par $(x-2)^2$, on obtient :

$$a_{1,1}(x-2)+a_{1,2}+\frac{a_2(x-2)^2}{x+1}=\frac{2x}{(x+1)}$$

puis on remplace x par 2,

$$a_{1,2}=\frac{4}{3}$$

Pour trouver $a_{1,1}$ (coefficient de la plus petite puissance), on on multiplie l'expression (4) par x, on obtient :

$$\frac{a_{1,1}x}{x-2} + \frac{a_{1,2}x}{(x-2)^2} + \frac{a_2 x}{x+1} = \frac{2x^2}{(x-2)^2(x+1)}$$

puis on fait tendre x vers $+\infty$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{a_{1,1}x}{x-2} & + & \dfrac{a_{1,2}x}{(x-2)^2} & + & \dfrac{a_2 x}{x+1} & = & \dfrac{2x^2}{(x-2)^2(x+1)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\ a_{1,1} & + & 0 & + & a_2 & = & 0 \end{array}$$

donc

$$a_{1,1} = -a_2 = \frac{2}{9}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{x-2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{x+1}$$

3.4.3 Cas de seconde espèce

Si on peut factoriser Q sous la forme :

$$Q(X) = \beta(X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2)(X - \alpha_1)$$

où $X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors il existe des constantes a_1, a_2 et b_1 telles que :

$$Q(x) = \frac{b_1 x + a_1}{X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2} + \frac{a_2}{X - \alpha_1} \tag{5}$$

Exemple 25.
Soit $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x^2+2x+2)(x+3)}$. *La forme de la DES est :*

$$f(x) = \frac{b_1 x + a_1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{a_2}{x+3}$$

Il faut donc trouver a_1, a_2 et b_1.

Méthode :

1. Pour trouver a_2, on utilise la méthode 2 présentée précédemment.
2. Pour trouver b_1, on multiplie l'équation (5) par x puis on fait tendre x vers $+\infty$.
3. Pour trouver a_1, on remplace x par 0 dans l'équation (5).

Exemple 25 (suite).

On sait que

$$f(x) = \frac{b_1x + a_1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{a_2}{x + 3} = \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 2)(x + 3)} \tag{6}$$

Pour trouver a_2, on multiplie l'expression (6) par $(x + 3)$, on obtient :

$$\frac{(b_1x + a_1)(x + 3)}{x^2 + 2x + 2} + a_2 = \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 2)}$$

puis on remplace x par -3,

$$a_2 = \frac{-7}{5}$$

Pour trouver b_1, on multiplie l'expression (6) par x, on obtient :

$$\frac{(b_1x + a_1)x}{x^2 + 2x + 2} + \frac{a_2x}{x + 3} = \frac{(3x + 2)x}{(x^2 + 2x + 2)(x + 3)}$$

puis on fait tendre x vers $+\infty$,

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{(b_1x + a_1)x}{x^2 + 2x + 2} & + & \dfrac{a_2x}{x + 3} & = & \dfrac{(3x + 2)x}{(x^2 + 2x + 2)(x + 3)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\ b_1 & + & a_2 & = & 0 \end{array}$$

donc

$$b_1 = -a_2 = \frac{7}{5}$$

Pour trouver a_1, on remplace x par 0 dans l'expression (6),

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = \frac{a_1}{2} - \frac{7}{15} = \frac{2}{6}$$

donc

$$a_1 = 2 \times \left(\frac{2}{6} + \frac{7}{15}\right) = 2 \times \left(\frac{10}{30} + \frac{14}{30}\right) = \frac{24}{15}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{3}{15} \times \frac{7x + 8}{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{5} \times \frac{1}{x + 3}$$

Remarque.
On peut aussi travailler dans $\mathbb{C}$ et se ramener à un cas de première espèce.

Exemple 26.
Soit $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)}$. Dans $\mathbb{C}$, on a :

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

d'où :

$$f(x) = \frac{x}{(x-i)(x+i)(x-1)}$$

Il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la forme de la DES de f dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$f(x) = \frac{a_1}{x-i} + \frac{a_2}{x+i} + \frac{a_3}{x-1} = \frac{x}{(x-i)(x+i)(x-1)} \tag{7}$$

où a_1, a_2 et a_3 peuvent être dans $\mathbb{C}$.

On utilise la méthode 2 pour déterminer a_1, a_2 et a_3. En multipliant (7) par $(x-i)$ et en remplaçant x par i, on trouve :

$$a_1 = \frac{i}{2i(i-1)} = \frac{1}{2(i-1)}$$

En multipliant (7) par $(x+i)$ et en remplaçant x par $-i$, on trouve :

$$a_2 = \frac{-i}{2i(i+1)} = \frac{-1}{2(i+1)}$$

En multipliant (7) par $(x-1)$ et en remplaçant x par 1, on trouve :

$$a_3 = \frac{1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$f(x) = \frac{1}{2(i-1)(x-i)} - \frac{1}{2(i+1)(x+i)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

Finalement, pour trouver la DES de f dans $\mathbb{R}$, on regroupe les termes complexes. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(i-1)(x-i)} - \frac{1}{2(i+1)(x+i)} &= \frac{(i+1)(x+i)-(i-1)(x-i)}{2(i-1)(i+1)(x+i)(x-i)} \\
&= \frac{ix-1+x+i-ix-1+x-i}{-4(x^2+1)} \\
&= \frac{2x-2}{-4(x^2+1)} \\
&= \frac{1-x}{2(x^2+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

3.4.4 Application au calcul d'intégrales

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^4+3x^3-2}{x^2+2x-3}dx$$

Pour trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 2}{x^2 + 2x - 3}$, on cherche la décomposition en élément simple de f.

Pour cela, on commence par déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de f.

En effectuant la division euclidienne de $(X^4 + 3X^3 - 2)$ par $(X^2 + 2X - 3)$, on trouve :

$$X^4 + 3X^3 - 2 = (X^2 + 2X - 3)(X^2 + X + 1) + X + 1$$

d'où :

$$f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

On cherche maintenant la DES de la partie fractionnaire $\dfrac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$.

Comme $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la DES est donc de la forme :

$$\frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x + 3} \tag{8}$$

Pour trouver a_1, on multiplie l'expression (8) par $(x - 1)$, puis on remplace x par 1. On trouve :

$$a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pour trouver a_2, on multiplie l'expression (8) par $(x + 3)$, puis on remplace x par -3. On trouve :

$$a_2 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Finalement, on a :

$$f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{1}{2(x + 3)}$$

On peut maintenant intégrer f.

$$\begin{aligned}
I = \int_{-1}^{0} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{1}{2(x + 3)} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{-1}^{0} x dx + \int_{-1}^{0} 1 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x - 1} dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x + 3} dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[x \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \left[\ln(|x - 1|) \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \left[\ln(|x + 3|) \right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - \frac{-1}{3} + 0 - \frac{1}{2} + 0 - (-1) + \frac{1}{2}(\ln(1) - \ln(2)) + \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2)) \\
&= \frac{5}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$