# 4 Logique et raisonnements

## 4.1 Notions de base de la logique

**Définition 1** (Implication).
*Soient $P$ et $Q$ deux propriétés (ou assertions). On note « $P \Rightarrow Q$ » et on lit « $P$* implique *$Q$ » le fait que :*

*Si $P$ est vraie alors $Q$ est vraie*

**Exemple 2.**

- $x = -2 \Rightarrow x < 0$
- $x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$ *(mais $x^2 > 16 \not\Rightarrow x > 4$)*
- *ABCD a 3 angles droits $\Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme*

**Définition 3** (Négation).
*Soit $P$ une propriété. On note* non-$P$ *la propriété qui est vraie si $P$ est fausse et fausse si $P$ est vraie.*

**Exemple 4.**
*Si $P =$ "Tous les garçons de la classe mesurent plus de 1m90"*

*Alors* non-$P$ = *"Au moins un garçon de la classe mesure moins de 1m90"*

**Remarque.**
*$P \Rightarrow Q$ veut aussi dire que :*

- *$P$ est une* condition suffisante *pour $Q$*
- *$Q$ est une* condition nécessaire *pour $P$*
- *Parmi $Q$ et* non-$P$*, au moins une propriété est vraie*

**Définition 5** (Équivalence).
*Soient $P$ et $Q$ deux propriétés. On note « $P \Leftrightarrow Q$ » et on lit « $P$* équivalent *à $Q$ » le fait que :*

$$P \Rightarrow Q \quad \underline{et} \quad Q \Rightarrow P$$

**Exemple 6.**

- $x = -2 \Leftrightarrow x < 0$ *et* $|x| = 2$
- $x^2 > 16 \Leftrightarrow x > 4$ *ou* $x < -4$
- *ABCD est un parallélogramme* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

**Remarque.**
*$P \Leftrightarrow Q$ veut aussi dire que :*

- *$P$ est une condition nécessaire et suffisante pour $Q$*
- $Q \Leftrightarrow P$
- *$P$ et $Q$ sont vraies ou fausses simultanément*
- *$P$ si et seulement si $Q$*

**Proposition 7.**
*Soient $P$ et $Q$ deux propriétés. On a :*

1. $\{P \Rightarrow Q\} \Leftrightarrow \{\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P\}$
2. $\{P \Rightarrow Q \ \text{ et } \ Q \Rightarrow R\} \Rightarrow \{P \Rightarrow R\}$
3. $\{P \Rightarrow Q \ \text{ et } \ Q \Rightarrow R \ \text{ et } \ R \Rightarrow P\} \Leftrightarrow \{P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R\}$

**Exemple 8.**

- ▷ $P =$ *"Il pleut" et* $Q =$ *"Il y a des nuages"*
  $P \Rightarrow Q$ *: "Si il pleut alors il y a des nuages"*
  non-$Q \Rightarrow$ non-$P$ *: "Si il n'y a pas de nuage alors il ne pleut pas"*

$$\{P \Rightarrow Q\} \Leftrightarrow \{\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P\}$$

- ▷

$$ABCD \ \text{ a 3 angles droits } \Rightarrow ABCD \ \text{ est un rectangle}$$

*et*

$$ABCD \ \text{ est un rectangle } \Rightarrow ABCD \ \text{ est un parallélogramme}$$

*donc*

$$ABCD \ \text{ a 3 angles droits } \Rightarrow ABCD \ \text{ est un parallélogramme}$$

## 4.2 Notations : ∀, ∃ et Σ

**Définition 9** (Quantificateurs)**.**
*On appelle* quantificateurs *les symboles* $\forall$ *et* $\exists$.

- ▷ $\forall$ *signifie « pour tout » ou « quelque soit »*
- ▷ $\exists$ *signifie « il existe »*

**Exemple 10.**

- ▷ *Soit la fonction* $f(x) = x^2$. *On peut écrire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$$

- ▷ *Soit la fonction* $f(x) = x^2 - 1$. *On peut écrire :*

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ f(x) \geq 0$$

**Remarque.**
*L'existence ne donne pas l'unicité !*

**Exemple 11.**
*Soit la fonction* $f(x) = x^2 - 1$. *On peut écrire :*

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ f(x) = 0$$

*mais il n'y a pas unicité puisque* $x = 1$ *et* $x = -1$ *vérifient cette propriété. En effet :*

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1$$

**Exemple 12.**

- ▷ "$\cos(x) = 0$ *admet des solutions" s'écrit :*

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \cos(x) = 0$$

- ▷ *"$n$ est un multiple de 3" s'écrit :*

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que} \quad n = 3k$$

- ▷ *"$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun" s'écrit :*

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad f(x) = g(x)$$

- ▷ *"$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$" s'écrit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$$

- ▷ *"Les termes de la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous nuls" s'écrit :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

- ▷ *"Au moins deux termes de la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égaux" s'écrit :*

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \textit{tels que} \quad u_{n_1} = u_{n_2}$$

- ▷ *"$f$ est croissante sur $\mathbb{R}$" s'écrit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

**Exemple 13.**

$$\textit{non-}(\exists m \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq m) = (\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad f(x) > m)$$

**Remarque.**
*L'ordre des quantificateurs est important !*

**Exemple 14.**
*La propriété*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que} \quad x + y = 0$$

*est VRAIE.*

*En effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, si on pose $y = -x$ alors $y$ est bien dans $\mathbb{Z}$ et on a $x + y = x - x = 0$.*

*La propriété*

$$\exists y \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \quad x + y = 0$$

*est FAUSSE.*

*Pour le démontrer on montre que la négation est vraie. La négation s'écrit :*

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que} \quad x + y \neq 0$$

*Soit $y \in \mathbb{Z}$, si on choisit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \neq -y$, alors $x + y \neq 0$. Donc pour tout $y \in \mathbb{Z}$ un tel $x \in \mathbb{Z}$ existe et on vient de démontrer que la négation est vraie et donc que la propriété est fausse.*

**Définition 15.**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et soit* $N \in \mathbb{N}^*$. *On note* $\sum_{n=1}^{N} u_n$ *la somme des* $N$ *premiers termes de la suite :*

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N$$

**Exemple 16.**

- ▷ $\sum_{n=1}^{5} n = 1+2+3+4+5 = \frac{5\times 6}{2} = 15$
- ▷ $\sum_{n=1}^{4} 2^n = 2^1+2^2+2^3+2^4 = 2\times\frac{1-2^4}{1-2} = 30$

**Proposition 17.**
*Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites.*

- ▷ $\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n$
- ▷ $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{N}(\lambda a_n) = \lambda\sum_{n=1}^{N} a_n$
- ▷ $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{N}\lambda = \lambda N$

## 4.3 Raisonnements mathématiques

### 4.3.1 Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer qu'une propriété universelle (c'est à dire commençant par un $\forall$) $P$ est fausse, <u>il suffit</u> de trouver un contre-exemple, c'est à dire un cas pour lequel $P$ est fausse.

**Exemple 18.**

$$\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad xy = 2$$

*Avec* $x = 0$, *on a* $\forall y\in\mathbb{R}, xy = 0$ *donc il n'existe pas de* $y\in\mathbb{R}$ *tel que* $xy = 2$. *Donc la propriété est fausse.*

**Remarque.**
*Pour montrer qu'une propriété existentielle (c'est à dire commençant par un* $\exists$*)* $P$ *est fausse, il faut prouver que la négation* non-$P$ *est vraie.*

### 4.3.2 Raisonnement par contraposée

**Définition 19.**
*Soient $P$ et $Q$ deux propriétés. On appelle* contraposée *de « $P \Rightarrow Q$ » l'implication « non-$Q \Rightarrow$ non-$P$ »*

Pour montrer qu'un énoncé de la forme « $P \Rightarrow Q$ » est vrai, on peut montrer que « non-$Q \Rightarrow$ non-$P$ »

**Exemple 20.**
*Pour montrer que :*

$$n^2 \text{ impair } \Rightarrow n \text{ impair}$$

*il est plus facile de montrer que*

$$n \text{ pair } \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

*En effet, si $n$ est pair alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, on a alors $n^2 = 4k^2$ et donc $n^2$ est bien pair.*

### 4.3.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montre qu'un énoncé $P$ est vrai, on suppose que $P$ est faux puis on démontre un résultat absurde (en utilisant non-$P$).

**Exemple 21.**
*Montrer que $0$ n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.*

*Supposons par l'absurde que $0$ a un inverse dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $A \times 0 = 1$ or dans $\mathbb{R}$, $A \times 0 = 0$, donc $0 = 1$. Comme ceci est absurde l'hypothèse de départ est fausse. Donc $0$ n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.*

### 4.3.4 Raisonnement par récurrence

On veut montrer qu'un énoncé, qui dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$, noté $P_n$ est vrai pour tout $n \geq n_0$, $n_0$ étant l'indice à partir duquel $P_n$ est toujours vrai.

**Méthode**

1. **Initialisation :** On montre que $P_{n_0}$ est vrai
2. **Hérédité :** On montre que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
3. **Conclusion**

**Exemple 22.**

▷ *Montrer que* $\forall n \geq 0, \quad 2^n \geq n+1$.

1. ***Initialisation :***

   *Pour* $n=0$, $2^0 = 1$ *et* $0+1=1$ *donc on a bien* $2^0 \geq 0+1$.
   *Donc la propriété est vraie au rang* $0$.

2. ***Hérédité :*** *On suppose le résultat vrai au rang* $n$ *et on montre qu'il est vrai au rang* $n+1$.

   *On sait que* $2^n \geq n+1$ *et que* $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. *On a alors :*

   $$2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

   *et comme* $n \geq 0$, $2(n+1) = 2n+2 \geq n+2 = (n+1)+1$ *Donc*

   $$2^{n+1} \geq (n+1)+1$$

   *Donc la propriété est héréditaire.*

3. ***Conclusion :*** *On a montré par récurrence que* $\forall n \geq 0, \quad 2^n \geq n+1$.

▷ *Montrer que* $\forall n \geq 0, \quad 4^n + 2$ *est divisible par* $3$.

1. ***Initialisation :***

   *Pour* $n=0$, $4^0 + 2 = 1+2 = 3$ *est divisible par* $3$.
   *Donc la propriété est vraie au rang* $0$.

2. ***Hérédité :*** *On suppose le résultat vrai au rang* $n$ *et on montre qu'il est vrai au rang* $n+1$.

   *On sait que* $4^n+2$ *est divisible par* $3$ *d'où,* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $4^n + 2 = 3k$. *On a alors :*

   $$\begin{array}{rclcl} 4^{n+1}+2 & = & 4 \times 4^n + 2 & = & 4(4^n+2-2)+2 \\ & & & = & 4(3k-2)+2 \\ & & & = & 12k-8+2 \\ & & & = & 12k-6 \\ & & & = & 3(4k-2) \end{array}$$

   *Donc* $4^{n+1}+2$ *est divisible par* $3$ *et donc la propriété est héréditaire.*

3. ***Conclusion :*** *On a montré par récurrence que* $\forall n \geq 0, \quad 4^n+2$ *est divisible par* $3$.