

## 6 Fonctions périodiques et opérations sur les fonctions

### 6.1 Définitions et premières propriétés

#### 6.1.1 Parité

**Définition 1** (FONCTION PAIRE ET IMPAIRE).

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D_f$ .

▷ On dit que  $f$  est paire si et seulement si  $\forall x \in D_f$ , on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

▷ On dit que  $f$  est impaire si et seulement si  $\forall x \in D_f$ , on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

**Exemple 2.**

▷  $f(x) = x^2$  est paire

▷  $f(x) = \cos(x)$  est paire

▷  $f(x) = \sin(x)$  est impaire

▷  $f(x) = x^3$  est impaire

▷  $f(x) = x \sin(x)$  est paire

**Remarque.**

Une fonction peut n'être ni paire ni impaire. Par exemple, les fonctions  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = \ln(x)$  ne sont ni paires ni impaires.

**Remarque.**

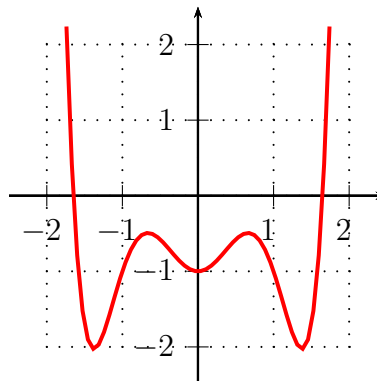
▷ Le produit de 2 fonctions qui ont la même parité est une fonction paire

▷ Le produit de 2 fonctions qui sont de parité différente est une fonction impaire

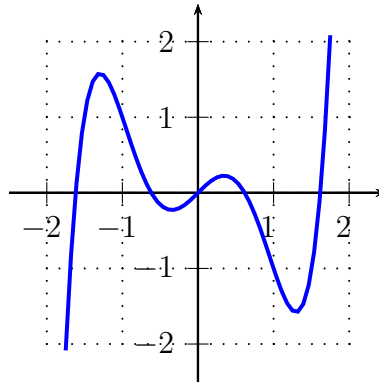
**Théorème 3.**

Soit  $f$  une fonction.

▷ Une fonction  $f$  est paire si et seulement si sa courbe  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



▷ Une fonction  $f$  est impaire si et seulement si sa courbe  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine



### 6.1.2 Fonctions périodiques

**Définition 4** (PÉRIODE).

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $T \in ]0, +\infty]$ . On dit que  $T$  est une période pour  $f$  si :

$$\forall t \in D_f, \quad t + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(t + T) = f(t)$$

**Remarque.**

Si  $f$  admet  $T$  pour période alors  $f$  admet également  $nT$  avec  $n \in \mathbb{Z}^*$  comme période. C'est pourquoi, dans la suite de ce cours, nous déterminerons toujours la plus petite période lorsque l'on cherche la période d'une fonction.

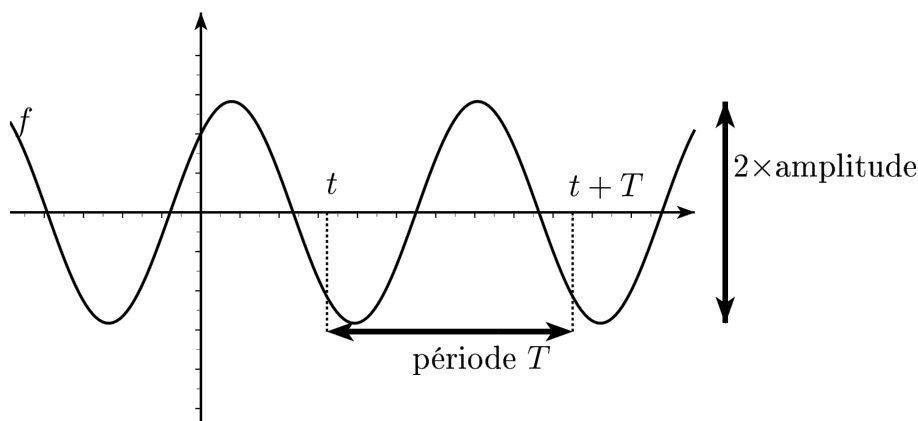
**Définition 5** (FONCTION PÉRIODIQUE, PULSATION ET AMPLITUDE).

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D_f$  et soit  $T \in ]0, +\infty]$ . On dit que  $f$  est  $T$ -périodique (ou périodique de période  $T$ ) si  $T$  est la plus petite des périodes pour  $f$ . On définit alors la pulsation  $\omega$  de  $f$  par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

et l'amplitude  $A$  de  $f$  par :

$$A = \frac{\max(f) - \min(f)}{2}$$

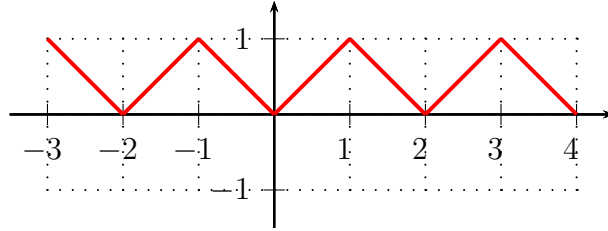


**Remarque.**

Pour définir une fonction  $T$ -périodique, il suffit de la connaître sur un intervalle de longueur  $T$ .

**Exemple 6.**

Représenter sur le graphique ci-dessous la fonction 2-périodique définie par  $f(x) = x$  si  $x \in [0, 1[$ . Puis donner son amplitude et sa pulsation.



Amplitude :

$$A = \frac{\max(f) - \min(f)}{2} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Pulsation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

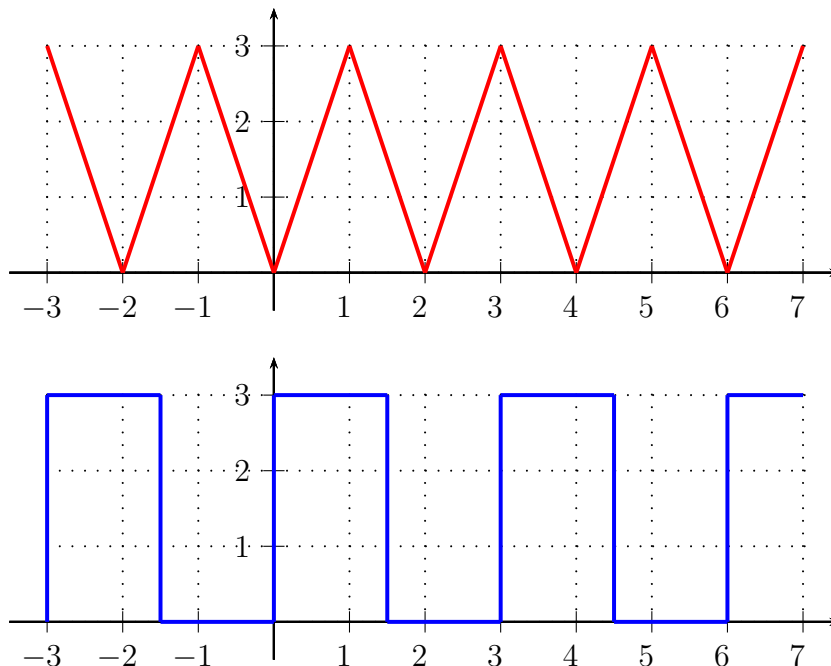
**Théorème 7.**

Soient  $f$  une fonction  $T_f$ -périodique et  $g$  une fonction  $T_g$ -périodique.

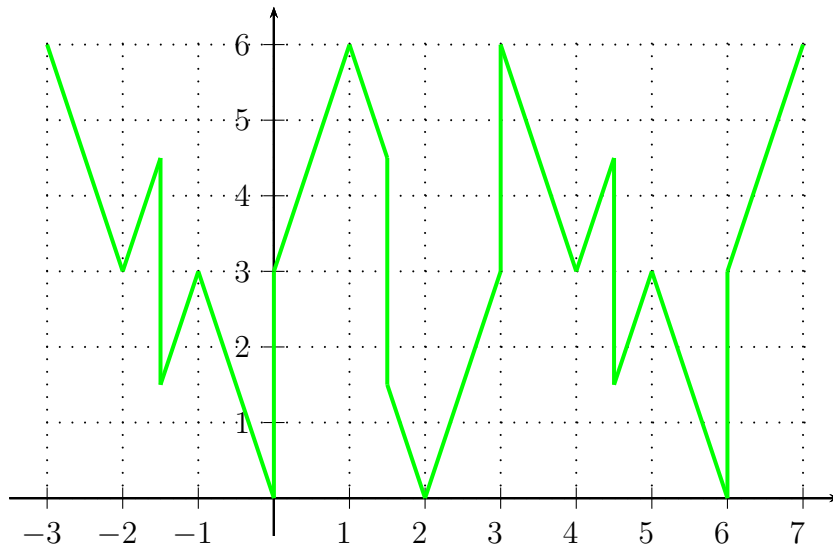
- ▷ Pour tout réel non nul  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda f$  est  $T_f$ -périodique
- ▷ Si  $T_f = T_g$ , alors  $f + g$  est  $T_f$ -périodique
- ▷ Si  $T_f \neq T_g$ , alors  $f + g$  est  $T$ -périodique avec  $T = \text{ppcm}(T_f, T_g)$

**Exemple 8.**

Considérons les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes, respectivement de période 2 et 3 :



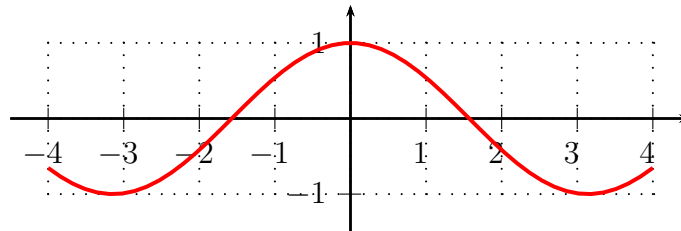
La fonction  $h(t) = f(t) + g(t)$  est de période  $\text{ppcm}(2, 3) = 6$  et a pour graphe :



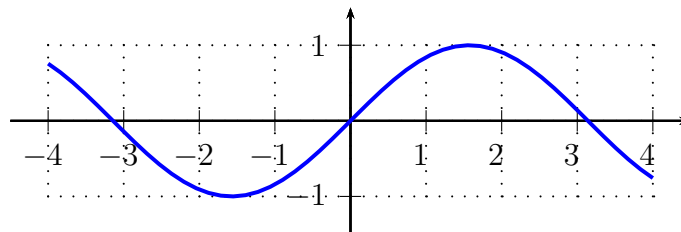
### 6.1.3 Fonctions cosinus et sinus

#### Théorème 9.

▷ Soit la fonction  $f(x) = \cos(x)$ .  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = -\sin(x)$ .  $f$  est une fonction paire et  $2\pi$ -périodique, d'amplitude 1. La courbe représentative de  $f$  est :



▷ Soit la fonction  $f(x) = \sin(x)$ .  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \cos(x)$ .  $f$  est une fonction impaire et  $2\pi$ -périodique, d'amplitude 1. La courbe représentative de  $f$  est :



#### Théorème 10.

Soit  $f$  une fonction trigonométrique telle que  $f(t) = \cos(\omega t)$  ou  $f(t) = \sin(\omega t)$ . Alors  $f$  est  $T$ -périodique avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Exemple 11.**

On considère les fonctions  $f(x) = \cos(6x)$  et  $g(x) = \sin(4x)$ . Déterminer les périodes de :  $f$ ,  $g$  et  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

$$\triangleright f \text{ est } T_f\text{-périodique avec } T_f = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\triangleright g \text{ est } T_g\text{-périodique avec } T_g = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\triangleright h \text{ est } T_h\text{-périodique avec } T_h = \text{ppcm} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right) = \text{ppcm} \left( \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \text{ppcm}(2, 3) = \frac{\pi}{6} 3 \times 2 = \pi$$

**Remarque.**

Soient  $\omega > 0$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

On rappelle que l'on peut écrire  $f$  sous la forme :

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\text{avec } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La fonction  $f$  est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , d'amplitude  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  et l'angle  $\Phi$  est appelé le déphasage par rapport à la fonction sinus.

**6.2 Opérations sur les fonctions**

On munit le plan d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**6.2.1 Retard et avance****Théorème 12.**

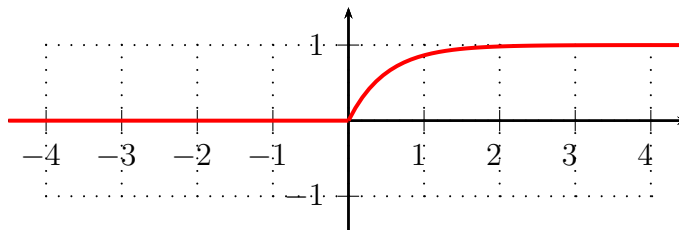
Soit  $f$  une fonction et soit  $\tau \in [0, +\infty[$ . On pose :

$$g(t) = f(t - \tau) \text{ et } h(t) = f(t + \tau)$$

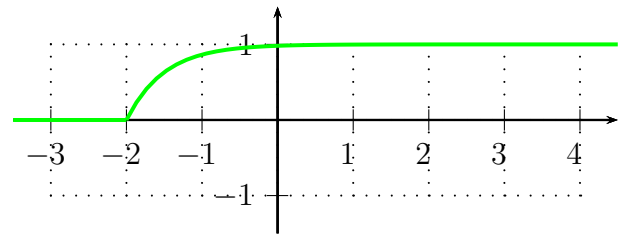
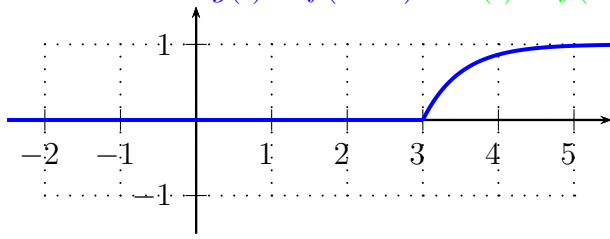
La courbe de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par translation de vecteur  $\tau \vec{i}$  (vers la droite). La courbe de  $h$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par translation de vecteur  $-\tau \vec{i}$  (vers la gauche).

**Exemple 13.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes  $g(t) = f(t-3)$  et  $h(t) = f(t+2)$  :



**Vocabulaire :** On dit que  $g$  est en retard par rapport à  $f$  et  $h$  est en avance par rapport à  $f$ .

### 6.2.2 Changement d'amplitude

#### Théorème 14.

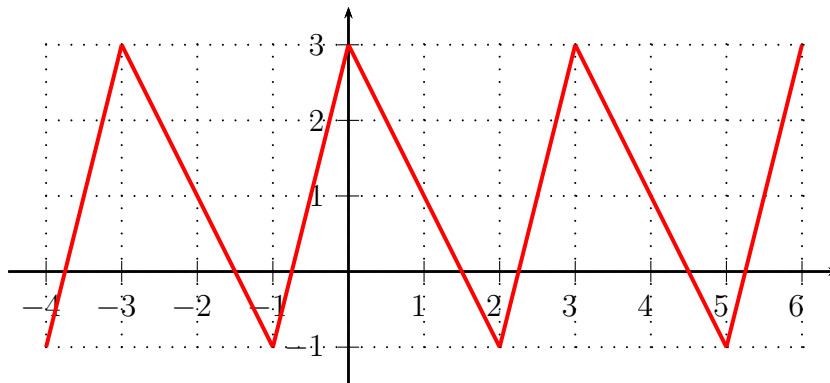
Soit  $f$  une fonction et soit  $A \in [0, +\infty[$ . On pose :

$$g(t) = Af(t)$$

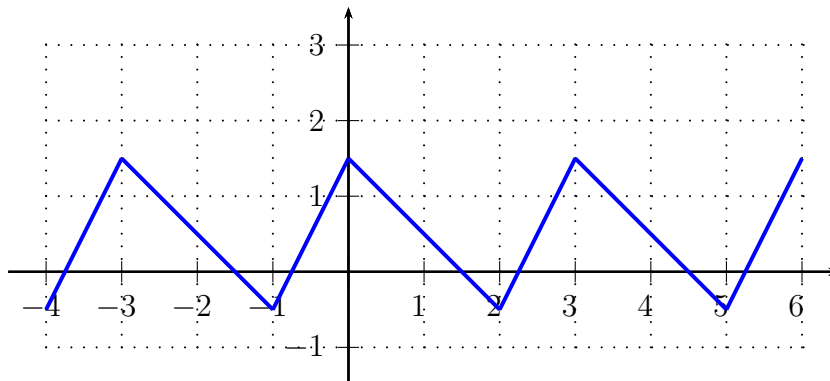
- ▷ Si  $A > 1$ , la courbe représentative de  $g$  est obtenue en "augmentant" l'amplitude de la courbe de  $f$  d'un facteur  $A$ .
- ▷ Si  $A < 1$ , la courbe représentative de  $g$  est obtenue en "diminuant" l'amplitude de la courbe de  $f$  d'un facteur  $A$ .

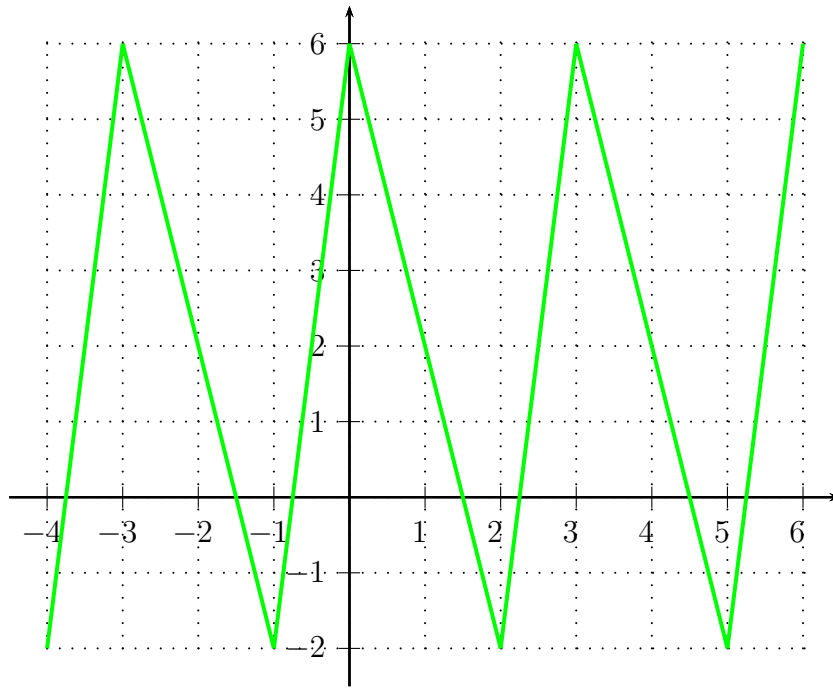
#### Exemple 15.

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes de  $g(t) = \frac{1}{2}f(t)$  et  $h(t) = 2f(t)$ .



**Théorème 16.**

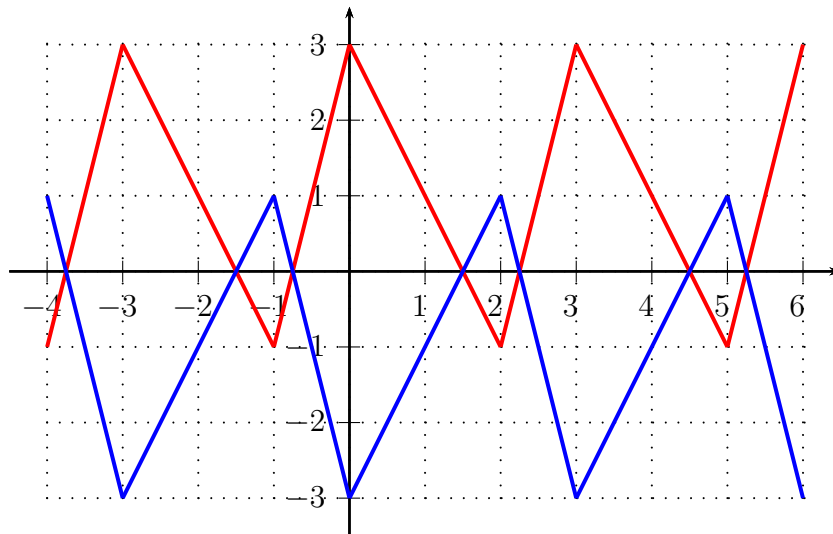
Soit  $f$  une fonction. On pose :

$$g(t) = -f(t)$$

La courbe représentative de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

**Exemple 17.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus la courbe de  $g(t) = -f(t)$ .

## 6.2.3 Offset

**Théorème 18.**

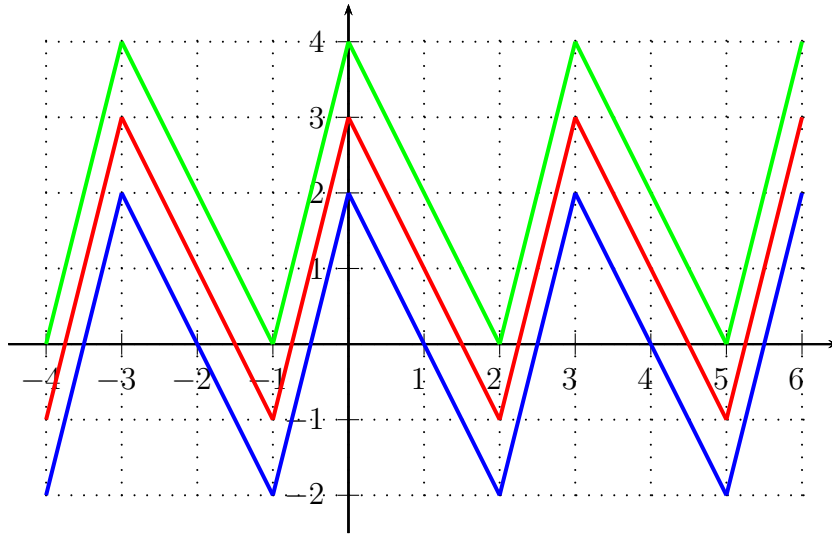
Soit  $f$  une fonction et soit  $V \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$g(t) = f(t) + V$$

La courbe de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par translation de vecteur  $V \vec{j}$  (vers le haut si  $V$  est positif et vers le bas si  $V$  est négatif).

**Exemple 19.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de  $g(t) = f(t) - 1$  et  $h(t) = f(t) + 1$ .

**Remarque.**

En génie électrique, si  $f$  est un signal sinusoïdal, on détermine la valeur moyenne de  $f$  notée  $V_{\text{moy}}$  puis on applique un offset de  $-V_{\text{moy}}$  pour obtenir un signal de valeur moyenne nulle ("centré à la hauteur" 0).

## 6.2.4 Dilatation du temps

**Théorème 20.**

Soit  $f$  une fonction et soit  $\omega \in ]0, +\infty[$ . On pose :

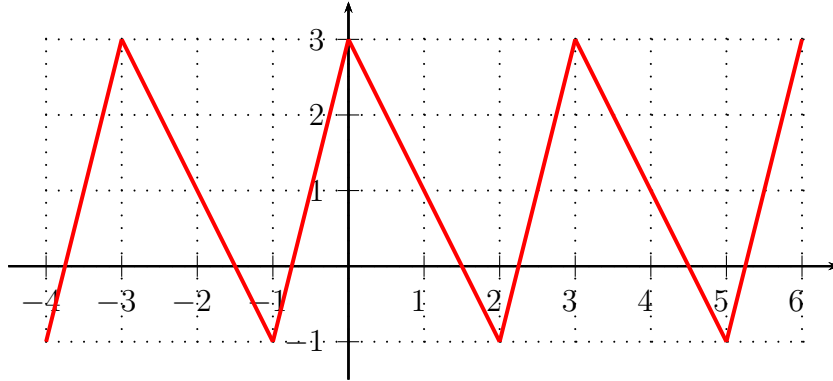
$$g(t) = f(\omega t)$$

- ▷ Si  $\omega > 1$ , la courbe représentative de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par "compression horizontale" de facteur  $\omega$  (le temps défile  $\omega$  fois plus vite et la période est divisée par  $\omega$ ).
- ▷ Si  $\omega < 1$ , la courbe représentative de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par "dilatation horizontale" de facteur  $\omega$  (le temps défile  $\omega$  fois plus lentement et la période est multipliée par  $\omega$ ).

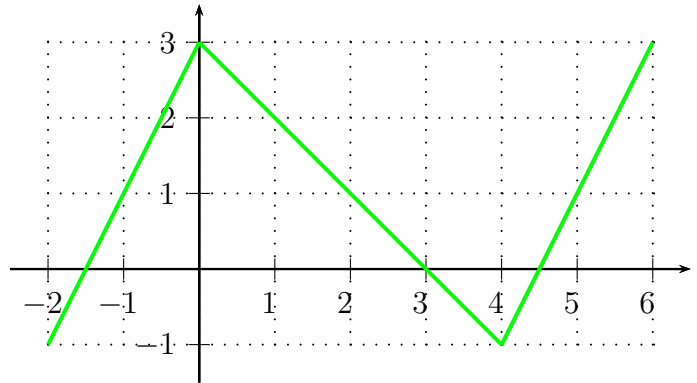
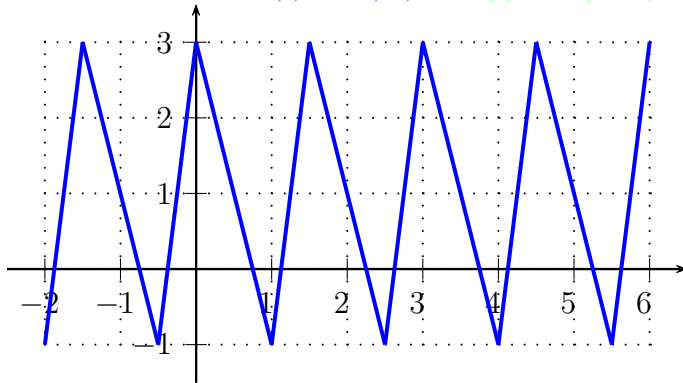


**Exemple 21.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes de  $g(t) = f(2t)$  et  $h(t) = f(0,5t)$ .

**Théorème 22.**

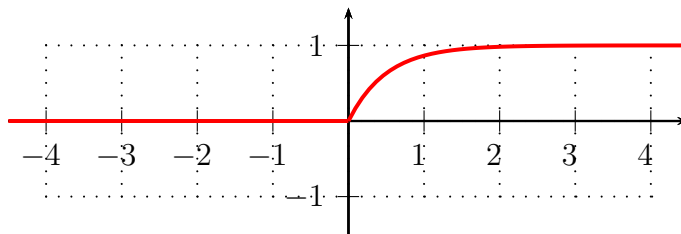
Soit  $f$  une fonction. On pose :

$$g(t) = f(-t)$$

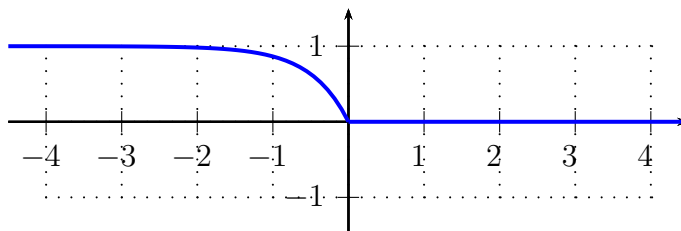
La courbe représentative de  $g$  est obtenue à partir de celle de  $f$  par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (on inverse le temps).

**Exemple 23.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de  $g(t) = f(-t)$  :



## 6.2.5 Redressement

**Théorème 24.**

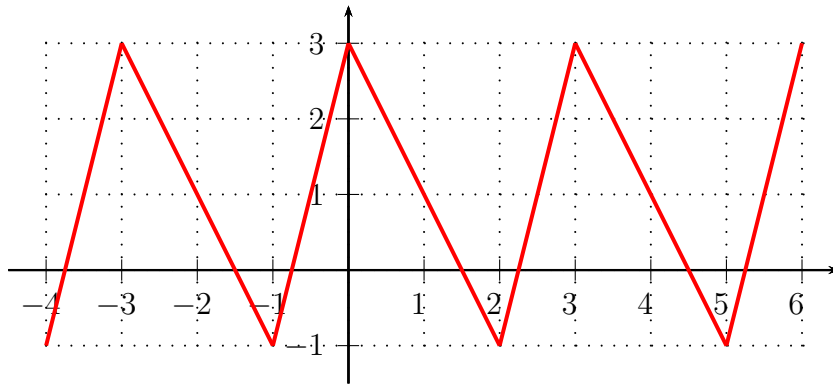
Soit  $f$  une fonction. On pose :

$$g(t) = |f(t)|$$

- ▷ Si  $f(t) > 0$  alors la courbe représentative de  $g$  est identique à celle de  $f$
- ▷ Si  $f(t) < 0$  alors la courbe représentative de  $g$  est la symétrique de celle de  $f$  par rapport à l'axe des abscisses
- ▷ Si  $f$  prend alternativement des valeurs positives et des valeurs négatives, on se ramène à des intervalles sur lesquels  $f(t) < 0$  et  $f(t) > 0$ .

**Exemple 25.**

Soit la fonction  $f$  dont la courbe représentative est :



Tracer la courbe de  $g(t) = |f(t)|$ .

