7 Continuité et dérivabilité en un point

7.1 Continuité en un point

Définition 1 (Limite en un point).
Soit f une fonction et soit $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *signifie que $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de a. Avec des quantificateurs, cela s'écrit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarque.
Lors d'un calcul de limite, si la forme de la fonction ne permet pas de conclure, on parle de Forme Indéterminée *(F.I.). Les F.I. classiques sont :*

- $\infty - \infty$
- $\infty \times 0$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$
- 1^{∞}

Exemple 2.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = ?$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, *mais* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *F.I.* ☹
   Comme x^2+1 et x sont des polynômes, on garde seulement le terme de plus haut degré, on alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ☺$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = ?$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, *mais* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *F.I.* ☹
   En utilisant les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \quad ☺$$

Proposition 3 (Croissances comparées).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

Définition 4 (Limite à droite et limite à gauche).
Soit f une fonction et soit $a \in \mathbb{R}$.

- ▷ *On note* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *la* limite à droite *de f en a.*
- ▷ *On note* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *la* limite à gauche *de f en a.*

Exemple 5.

- ▷ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- ▷ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Définition 6 (Continuité).
Soit f une fonction définie sur l'ensemble D_f et soit $a \in \mathbb{R}$.

- ▷ *Si $a \in D_f$ et* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *alors on dit que f est* continue *en a.*
- ▷ *Si $a \notin D_f$ et* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *alors on dit que f est* prolongeable par continuité *en a et on a $f(a) = l$.*

Exemple 7.

1. *Étudier la continuité de* $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2+2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

   La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto 2x+1$ et $x \mapsto x^2+2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$. En $1 \in D_f$, on a :

   $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3$$

   et

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 + 2 = 3$$

   Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Étudier la continuité de* $g(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

   La fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R} \backslash \{1\}$. La fonction g est une fonction rationnelle (i.e. un quotient de fonctions polynomiales), elle est donc continue sur son ensemble de définition D_g. En $1 \notin D_g$, on a :

   $$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x + 3 = 4$$

   et de la même manière,

   $$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x + 3 = 4$$

   Donc la fonction g est prolongeable par continuité en 1 par $g(1) = 4$.

7.2 Dérivabilité en un point

Définition 8 (Dérivabilité).
Soit f une fonction définie sur l'ensemble D_f et soit $a \in D_f$. On dit que f est dérivable *en a si et seulement si :*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d \in \mathbb{R}$$

La valeur de la limite d est appelé nombre dérivé *en a et se note $f'(a)$.*

Exemple 9.

1. *Étudier la dérivabilité de $f(x) = x^2$ en 1.*

   On a :
   $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$
   Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

2. *Étudier la dérivabilité de $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 1 \\ x^2 + 2 & si\ x < 1 \end{cases}$ en 1*

   On a :
   $$\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$$
   et
   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2$$
   Donc g est dérivable en 1 et $g'(x) = 2$.

3. *Étudier la continuité et la dérivabilité de $h(x) = |x|$ en 0.*

   On a $\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$ donc h est continue en 0.
   De plus, on a :
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} signe(x) = 1$$
   et
   $$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} signe(x) = -1$$
   Donc h n'est pas dérivable en 0.

Remarque.

1. *f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a*
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3. $d(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *est le coefficient directeur de la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$*
4. *$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a. En effet, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$*
5. *Si f n'est pas dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ n'a pas de tangente en a, on observe une "cassure" sur la courbe*

Méthode : Calculer une limite grâce au nombre dérivé

On cherche la limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=?$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, il s'agit d'une F.I.

On cherche alors à utiliser le nombre dérivé en 0, c'est à dire :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ car $\sin(0)=0$.
De plus, on sait que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cos, d'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\cos(0)=1$$

Finalement, on trouve :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

7.3 Équivalents

Définition 10 (Fonctions équivalentes)**.**
Soient f et g deux fonctions et soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
On dit que f et g sont équivalentes *en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. On note $f\underset{a}{\sim}g$.*

Exemple 11.

1. *On a vu que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ donc $\sin(x)\underset{0}{\sim}x$*
2. *On a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{2x^2}=1$ donc $2x^2+3x-1\underset{\infty}{\sim}2x^2$*