8 Composée de fonctions

Définition 1 (Ensemble image).
Soit f une fonction définie sur D_f. Soit $I \subseteq D_f$. On note $f(I)$ l'ensemble image *de I par f défini par :*

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in I, f(x) = y\}$$

Exemple 2.
Si on considère $f(x) = x^2$, alors :

- ▷ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$
- ▷ $f([1,4[) = [1,16[$
- ▷ $f(]-2,3]) = [0,9]$

Définition 3 (Fonction composée).
Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $f(D_f) \subseteq D_g$.
On appelle fonction composée *de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie par :*

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

On lit "g rond f".

Exemple 4.
Si $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x^2$ alors :

- ▷ $g \circ f = g\left(f(x)\right) = g\left(2x+1\right) = (2x+1)^2$
- ▷ $f \circ g = f\left(g(x)\right) = f\left(x^2\right) = 2x^2 + 1$

Remarque.

- ▷ *En général, $g \circ f \neq f \circ g$*
- ▷ *La composée de fonction est associative, c'est à dire :*

$$f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Proposition 5.
Soient f et g deux fonctions dérivables. On a :

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f' \circ g(x)$$

Exemple 6.
Soit u une fonction.

- ▷ $(\cos(u(x))' = u'(x) \times (-\sin(u(x))$
- ▷ $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$